web 01 La risoluzione delle reti mediante i principi di Kirchhoff

Considerato che le variabili da determinare sono le correnti nei diversi rami, indicando con **n** il numero dei nodi presenti nella rete, **r** il numero di rami della rete e con **m** il numero delle maglie indipendenti, è possibile comporre "**n – 1**" equazioni indipendenti ai nodi ed **m = r – n + 1** equazioni alle maglie.
Le r equazioni complessive così ottenute, messe in sistema tra loro, **sono sufficienti** a determinare tutte le correnti presenti nella rete.
Nella composizione delle equazioni alle maglie, si considera **indipendente** una maglia che possiede almeno un ramo non coperto da maglie individuate in precedenza. In caso contrario, difatti, l'equazione relativa risulterebbe una combinazione lineare delle equazioni precedenti e non sarebbe utilizzabile.

Data una rete da analizzare, si procede quindi in questo ordine.

1. Si fissano in modo arbitrario i versi delle correnti in ogni ramo della rete. Per comodità di segno si cerca di assecondare il verso reale, in un generatore, per esempio, quello uscente dal morsetto positivo, ma non è vincolante.
   Si può facilmente verificare al termine che, nel caso si fosse scelto il verso opposto, il risultato è negativo. Il segno meno di una corrente ha proprio questo significato: il verso reale della corrente è opposto a quello scelto in prima battuta sullo schema.
2. In base ai versi scelti per le correnti, si segnano tutte le cadute di tensione, nel rispetto delle convenzioni di segno (si ricordi che il punto a potenziale maggiore è quello dal quale entra la corrente).
3. Si compongono le necessarie equazioni da porre in sistema.
   Per quanto riguarda le equazioni alle maglie, per essere sicuri di comporre solo equazioni indipendenti, si può procedere considerando idealmente aperto uno dei rami di ciascuna maglia già considerata.

Si consideri, per esempio, la rete riportata in fig. 1, con già segnati i versi scelti per le correnti e le conseguenti cadute di tensione. Questa rete presenta due nodi (A e B), tre rami e tre maglie, di cui due adiacenti (m_1 ed m_2 nel disegno), ed una più esterna (fig. 2), che racchiude le prime due.

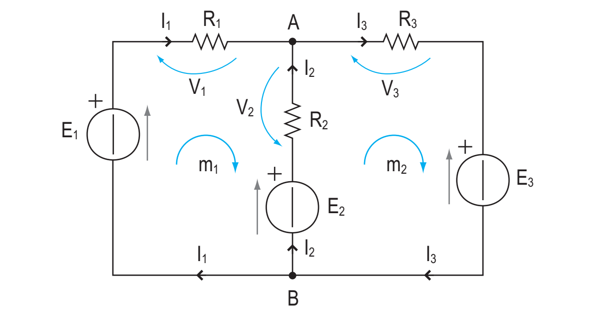

Fig. 1 Rete elettrica.

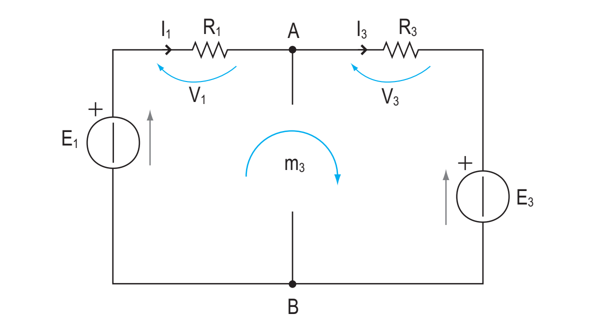

Fig. 2 Terza maglia, m_3.

Per quanto riguarda la legge ai nodi, poiché questi sono solo due, è possibile comporre due equazioni, ma una sola di queste è utilizzabile.
Applicando il primo principio al nodo A, si ottiene l'equazione:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Applicando il medesimo principio al nodo B, l'equazione ottenuta è

$$I_3 = I_1 + I_2$$

risultando identica alla precedente, è inutile per l'analisi della rete, perché non aggiunge alcuna informazione ulteriore.

Le maglie invece sono tre, perciò sarebbe possibile comporre ben tre equazioni, ma, per le regole enunciate sopra, solo r – n + 1 di queste sono indipendenti, ovvero due. Si tratta quindi di sceglierle tra le seguenti, nell'ordine:

- per la maglia m_1

$$E_1 - V_1 + V_2 - E_2 = 0$$

che diventa:

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - E_2 = 0$$

- per la maglia m_2

$$E_2 - V_2 - V_3 - E_3 = 0$$

che diventa:

$$E_2 - R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - E_3 = 0$$

- per la maglia m_3

$$E_1 - V_1 - V_3 - E_3 = 0$$

che diventa:

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 - E_3 = 0$$

Per esempio, una volta composta l'equazione alla maglia m_1, aprendo idealmente il ramo di sinistra, la sola maglia utilizzabile resta m_2.
Ponendo a sistema tre equazioni indipendenti, la prima tra quelle ai nodi e le prime due tra quelle alle maglie, una volta noti i valori dei generatori e delle resistenze, è possibile determinare i valori delle correnti, I_1, I_2, I_3, circolanti nella rete.
Supponendo che i componenti indicati in fig. 1 abbiano i seguenti valori:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega$$

$$E_1 = 10\ V$$

$$E_2 = 12\ V$$

$$E_3 = 5\ V$$

Scegliendo le prime tra le equazioni trovate, queste diventano rispettivamente:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 10 - 10 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 - 12 = 0 \\ 12 - 10 \cdot I_2 - 10 \cdot I_3 - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ I_1 = \dfrac{10 \cdot I_2 - 2}{10} \\ I_3 = \dfrac{7 - 10 \cdot I_2}{10} \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni di I_1 e I_3 nella prima si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{10 \cdot I_2 - 2}{10} + I_2 = \dfrac{7 - 10 \cdot I_2}{10} \\ \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} I_2 = 0{,}3\ A \\ \ldots \end{cases}$$

Nota I_2, si ricavano gli altri valori:
$I_1 = 0{,}1$ A; $I_3 = 0{,}4$ A.

ESERCIZI DA SVOLGERE

ESERCIZIO 1

Scrivere tutte le possibili equazioni alle maglie per il circuito di fig. 3.

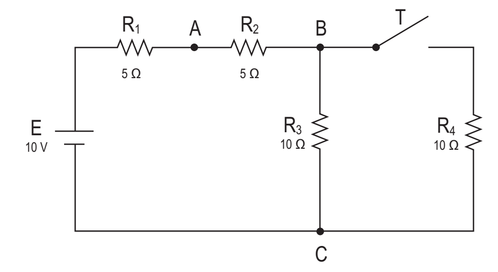

Fig. 3

[Ris.: $E_1 - R_1 \cdot I - R_2 \cdot I_2 = 0$;
$E_1 - R_1 \cdot I - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_3 - E_2 = 0$;
$R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_3 - E_2 = 0$]

ESERCIZIO 2

Dato il circuito in fig. 4, ricavare i valori delle tensioni V_{AB} e V_{CB}, sia con il tasto T aperto che con T chiuso.

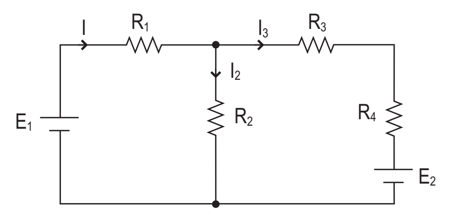

Fig. 4

[Ris.: con T aperto: V_{AB} = 12 V, V_{CB} = 2 V;
con T chiuso: $V_{AB} = V_{CB}$ = 10 V]