web 02 Potenza in regime sinusoidale

In una resistenza alimentata in alternata, tensione e corrente sono in fase tra loro (fig. 1) e il loro prodotto, istante per istante, è di frequenza doppia, ma sempre positivo.

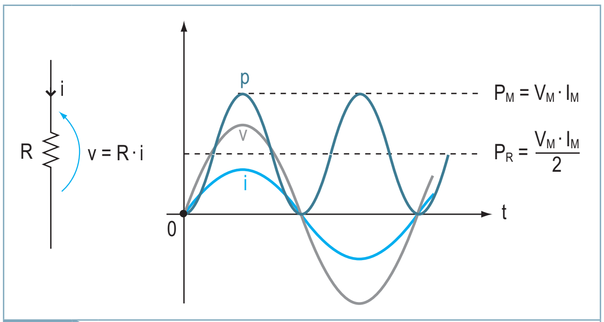

Fig. 1 Potenza attiva su una resistenza alimentata in alternata.

La potenza media nel periodo, detta **potenza attiva**, è quindi ricavabile sia dai valori massimi, sia, per loro stessa definizione, dai valori efficaci

$$P_R = \frac{V_M \cdot I_M}{2} = V_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{V_{eff}^2}{R} = R \cdot I_{eff}^2$$

e si misura in watt [W]. L'esattezza della relazione è subito verificabile se si considera che in una sinusoide

$$V_{eff} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}$$

In un induttore, invece, dato che lo sfasamento reciproco è di 90°, il prodotto istante per istante tra la tensione e la corrente alterna quarti di periodo con risultati positivi a quarti con risultati negativi (fig. 2), con valor medio nullo nel periodo.

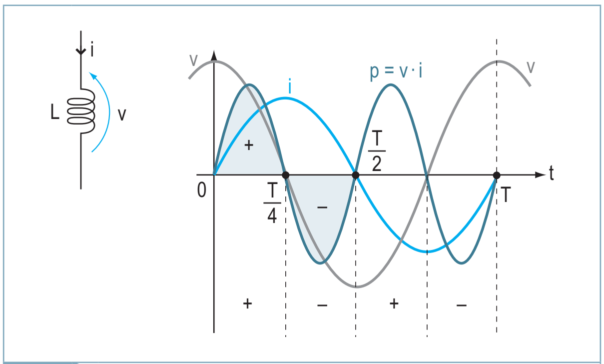

Fig. 2 Potenza reattiva su un induttore alimentato in alternata.

Il prodotto trigonometrico

$$V_M \cdot \cos(\omega t) \cdot I_M \cdot \operatorname{sen}(\omega t) = \frac{V_M \cdot I_M}{2} \cdot \operatorname{sen}(2\omega t)$$

è difatti una sinusoide, anche se di frequenza doppia, con valor medio nullo. La potenza induttiva è, quindi, continuamente scambiata tra generatore e induttore, quattro volte in ogni periodo, senza alcuna dissipazione per l'effetto Joule. Si parla difatti di **potenza reattiva**, per distinguerla dalla potenza attiva dissipata su una resistenza e si misura in volt-ampere reattivi [VAR].
Per il condensatore vale un ragionamento analogo.

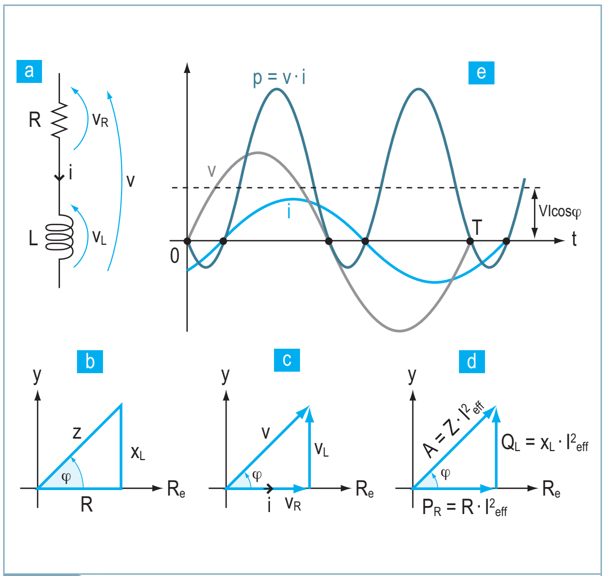

Fig. 3 Circuito RL in regime sinusoidale.

Si consideri ora il circuito RL di fig. 3a. Moltiplicando per la corrente il triangolo delle impedenze (fig. 3b), si ottiene il triangolo delle cadute di tensione (fig. 3c) e, da questo, moltiplicando ancora per la corrente, si ottiene il triangolo delle potenze (fig. 3d), un triangolo equivalente i cui lati sono, rispettivamente

$$P_R = R \cdot I_{eff}^2$$

la potenza attiva [W]

$$Q_L = X_L \cdot I_{eff}^2$$

la potenza reattiva [VAR] e

$$A = V_{eff} \cdot I_{eff} = Z \cdot I_{eff}^2$$

la cosiddetta **potenza apparente**, detta appunto così perché ottenuta dal prodotto diretto dei valori efficaci di tensione e corrente, ma che non

corrisponde alla vera potenza attiva scambiata in modo unidirezionale con il circuito e, per questo motivo misurata in volt-ampere [VA].
Nel rispetto delle regole del triangolo, valgono tutte le relazioni seguenti

$$A = \sqrt{P_R^2 + Q_L^2} \quad [VA]$$

$$P_R = A \cdot \cos(\varphi) = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) \quad [W]$$

$$Q_L = A \cdot \mathrm{sen}(\varphi) = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \mathrm{sen}(\varphi) \quad [VAR]$$

Osservando difatti l'andamento nel tempo del prodotto tensione-corrente (fig. 3e), si nota che questo è composto da una funzione periodica, di frequenza doppia, sovrapposta ad una componente continua di valore

$$V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)$$

a conferma della composizione complessa della potenza apparente nelle due componenti, attiva unidirezionale dissipata sulla resistenza e reattiva bidirezionale scambiata con l'induttore.
Appunto perché il prodotto V · I, che appare dall'esterno, non è la vera potenza attiva trasferita, il termine

$$\cos\varphi = \frac{P}{A} = \frac{R}{Z}$$

è più noto come **fattore di potenza**. Per le regole trigonometriche, la potenza reattiva può essere derivata direttamente dalla potenza attiva mediante la

$$Q_L = P \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$$

In modo analogo, in un circuito RC, si parlerà di potenza reattiva capacitiva

$$Q_C = X_C \cdot I_{eff}^2 \quad [VAR]$$

e la potenza apparente sarà

$$A = \sqrt{P_R^2 + Q_C^2} \quad [VA]$$

Per estensione, in un circuito RLC in serie (fig. 4a), tenuto conto che le cadute v_L e v_C sono sfasate di 180° tra loro (fig. 4b), la potenza apparente (fig. 4c) risulterà

$$A = \sqrt{P_R^2 + (Q_L - Q_C)^2} \quad [VA]$$

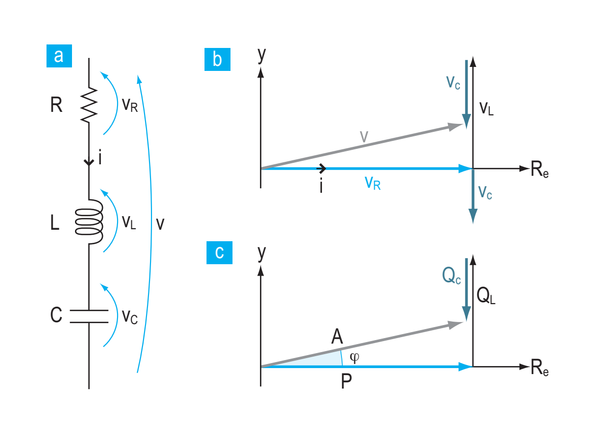

Fig. 4 Triangolo delle potenze in un circuito RLC.

Teorema di Boucherot

Il teorema di Boucherot offre un modo semplice e veloce per determinare tensioni e correnti nei diversi punti di una rete in alternata. Si parla difatti di **metodo di Boucherot** o metodo delle potenze.
Il teorema afferma che, data una rete in regime sinusoidale:

- la **potenza attiva** in una qualsiasi sezione della rete vale la **somma aritmetica** di tutte le potenze attive presenti a valle della sezione stessa;
- la **potenza reattiva** in una sezione della rete è pari alla **somma algebrica** di tutte le potenze reattive presenti a valle della sezione.

Si consideri, per esempio, la rete di fig. 5, della quale, conoscendo le potenze dei diversi carichi inseriti e la tensione V_o all'estremo della rete, si vogliono determinare tensione e corrente in ingresso.

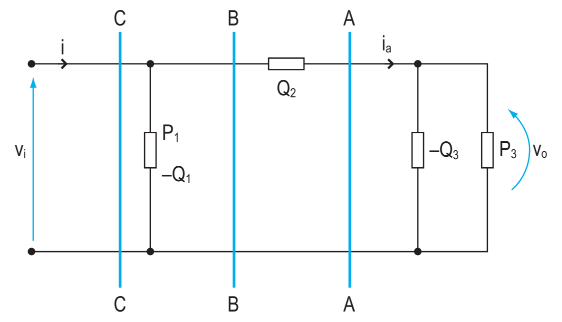

Fig. 5 Rete di carichi in regime sinusoidale.

Considerando la sezione A-A, si può scrivere:

$$P_{A-A} = P_3$$

$$Q_{A-A} = -Q_3$$

$$A_{A-A} = \sqrt{P_{A-A}^2 + Q_{A-A}^2}$$

$$I_A = \frac{A_{A-A}}{V_o}$$

Per la sezione B-B

$$P_{B-B} = P_{A-A}$$

$$Q_{B-B} = Q_2 - Q_3$$

$$A_{B-B} = \sqrt{P_{B-B}^2 + Q_{B-B}^2}$$

$$V_i = \frac{A_{B-B}}{I_A}$$

Per la sezione C-C di ingresso

$$P_{C-C} = P_{B-B} + P_1$$

$$Q_{C-C} = Q_{B-B} - Q_1$$

$$A_{C-C} = \sqrt{P_{C-C}^2 + Q_{C-C}^2}$$

$$I = \frac{A_{C-C}}{V_i}$$

Come si vede, si è potuto operare senza impiego di vettori.

Esercizio svolto n. 1

Esercizio da svolgere n. 1

Caduta di linea

Una linea elettrica, che alimenta a distanza un carico in alternata, è composta da due conduttori, uno di andata e l'altro di ritorno (fig. 6).
Il suo modello elettrico, cosiddetto a parametri concentrati, risulta composto da una resistenza, la resistenza elettrica dei conduttori stessi, in serie ad una induttanza, che tiene conto dell'accoppiamento magnetico tra i due conduttori, il tutto chiuso da un condensatore che rappresenta l'accoppiamento capacitivo esistente tra i due conduttori separati dall'isolante (fig. 7).

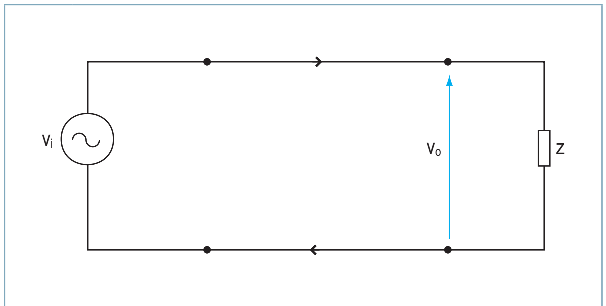

Fig. 6 Linea elettrica di alimentazione.

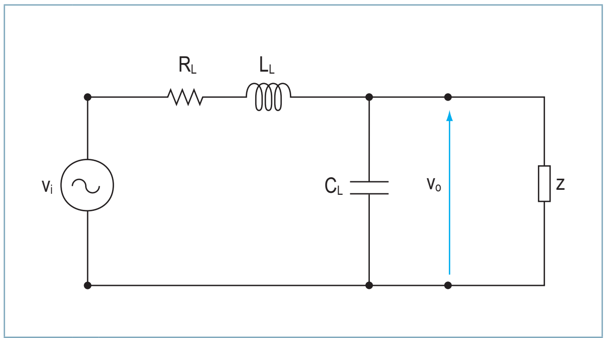

Fig. 7 Modello elettrico di una linea, a parametri concentrati.

Il modello normalmente utilizzato, però, trascura la componente capacitiva. Difatti, considerando un accoppiamento tipico di 10 pF/m, a 50 Hz, persino una linea lunga 10 km presenta una reattanza capacitiva talmente alta da renderla tranquillamente trascurabile

$$X_C = \frac{1}{2\pi\, f\, C_L} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\ \text{Hz} \cdot 10\,\frac{\text{pF}}{\text{m}} \cdot 10^3\,\text{m}} = 318\ \text{k}\Omega$$

Purtroppo, i componenti presenti nel modello elettrico comportano una caduta di tensione lungo la linea stessa (fig. 8a), con conseguente riduzione della tensione consegnata al carico.

Supponendo $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_o$ poco sfasate tra loro, la loro differenza, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_i - \vec{v}_o$ può essere semplificata con la somma delle proiezioni delle singole cadute parziali (fig. 8b), con modulo

$$\Delta V = R_L \cdot I \cdot \cos\varphi + X_L \cdot I \cdot \text{sen}\,\varphi$$

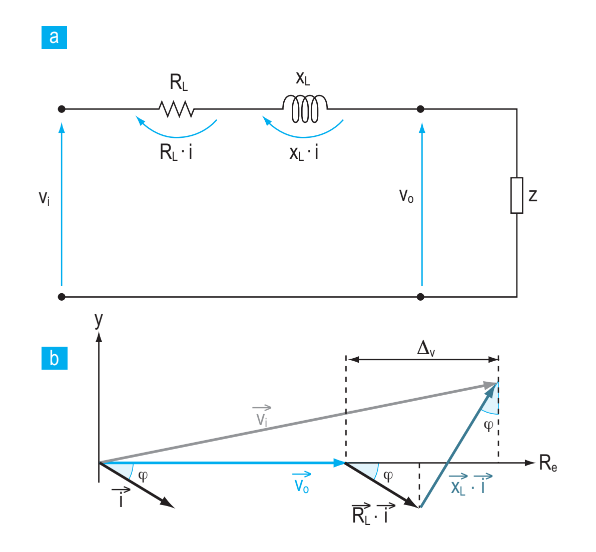

Fig. 8 Cadute di tensione in linea.

Esercizio svolto n. 2

Esercizio da svolgere n. 2

Rifasamento

Come si è visto nel paragrafo precedente, in una linea che alimenta a distanza un carico in alternata, la tensione sul carico è minore rispetto alla tensione in ingresso. Lungo la linea ci sono una caduta di tensione e una perdita di potenza per l'effetto Joule

$$P_L = R_L \cdot I^2$$

Viene definito **rendimento di linea** il rapporto tra la potenza attiva utile fornita al carico (P_o) e l'intera potenza attiva introdotta a monte della linea

$$\eta = \frac{P_o}{P_L + P_o} \cdot 100$$

La potenza persa è proporzionale alla resistenza di linea e al quadrato della corrente sul carico; perciò, per ottimizzare il rendimento, si può ridurre la resistenza di linea, utilizzando cavi di sezione (e costo) maggiore, ma soprattutto si può ridurre la corrente di linea al suo valore minimo indispensabile, rendendo nullo lo sfasamento sul carico, operazione detta appunto **rifasamento** del carico.

Per capire meglio la correzione, si consideri il carico nel suo circuito equivalente parallelo (fig. 9a).

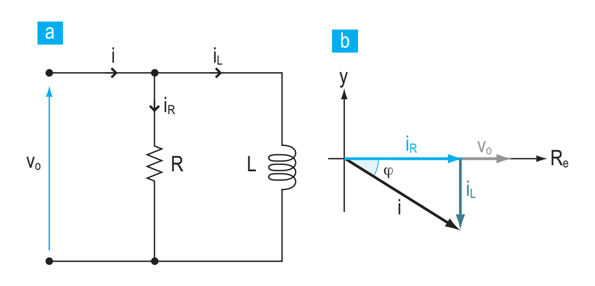

Fig. 9 Equivalente parallelo di un carico ohmico-induttivo.

Se il carico ha una componente reattiva (φ ≠ 0, fig. 9b), la corrente di linea (i) risulta maggiore della sola corrente attiva (i_R), l'unica utilizzabile per ottenere calore, movimento, ecc. La componente reattiva produce unicamente un aumento delle perdite di potenza in linea P_L.

Il rifasamento della corrente di linea si ottiene ponendo in parallelo al carico una batteria di condensatori. In questo modo, l'impedenza di carico, vista dalla linea, si può ridurre alla sola componente resistiva e la corrente di linea alla sola componente i_R.

Applicando il teorema di Boucherot, si ottiene la batteria di condensatori, da porre in parallelo al carico. Questa deve possedere una potenza reattiva pari a quella del carico.

Esercizio svolto n. 3

Esercizio da svolgere n. 3

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Dei carichi presenti nello schema di fig. 5 sono noti i seguenti valori: $P_1 = 200$ W, $Q_1 = -200$ VAR, $Q_2 = 100$ VAR, $Q_3 = -100$ VAR, $P_3 = 500$ W. Sapendo che $V_i = 230$ V, determinare i valori delle correnti I e I_A.

Soluzione

Per la sezione C-C di ingresso

$$P_{C-C} = P_3 + P_1 = 500 + 200 = 700 \text{ W}$$

$$Q_{C-C} = -200 + 100 - 100 = -200 \text{ VAR}$$

$$A_{C-C} = \sqrt{P_{C-C}^2 + Q_{C-C}^2} = \sqrt{700^2 + 200^2} = 728\ \text{VA}$$

$$I = \frac{A_{C-C}}{V_i} = \frac{728\ \text{VA}}{230\ \text{V}} = 3,16\ \text{A}$$

Per la sezione B-B

$$P_{B-B} = P_3 = 500\ \text{W}$$

$$Q_{B-B} = -100 + 100 = 0$$

$$A_{B-B} = 500\ \text{VA}$$

$$I_A = \frac{A_{B-B}}{V_i} = \frac{500\ \text{VA}}{230\ \text{V}} = 2,17\ \text{A}$$

ESERCIZIO 2

Un carico in alternata monofase da 230 V, 50 Hz, 2 kW, cos φ = 0,8, è alimentato a distanza con un cavo che presenta una resistenza R_L = 2 Ω e una reattanza X_L = 1 Ω. Determinare la reale potenza attiva consumata dal carico e la tensione effettivamente presente ai suoi morsetti.

Soluzione

Poiché l'unica grandezza certa è la tensione a monte della linea (V = 230 V), bisogna ricostruire il modello elettrico del carico per determinare l'impedenza complessiva vista dal generatore e calcolare l'effettiva corrente in linea.

Modello elettrico del carico

$$A_C = \frac{P_C}{\cos\varphi} = \frac{2.000\ \text{W}}{0,8} = 2.500\ \text{VA}$$

$$I_C = \frac{A_C}{V} = \frac{2.500\ \text{VA}}{230\ \text{V}} = 10,87\ \text{A}$$

$$R_C = \frac{P_C}{I_C^2} = \frac{2.000\ \text{W}}{(10,87\ \text{A})^2} = 16,93\ \Omega$$

$$\varphi = \arccos\ (0,8) = 36,87°$$

$$X_C = R_C \cdot \text{tg}\ \varphi = 16,93\ \Omega \cdot 0,75 = 12,7\ \Omega$$

Impedenza complessiva vista dal generatore

$$R_T = R_L + R_C = 2 + 16,93 = 18,93\ \Omega$$

$$X_T = X_L + X_C = 1 + 12,7 = 13,7\ \Omega$$

$$Z_T = \sqrt{R_T^2 + X_T^2} = 23,37\ \Omega$$

$$\cos\varphi_T = \frac{R_T}{Z_T} = \frac{18,93\ \Omega}{23,37\ \Omega} = 0,81$$

Corrente in linea

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{230\ \text{V}}{23,37\ \Omega} = 9,84\ \text{A}$$

Potenza attiva consumata dal carico

$$P_C = R_C \cdot I^2 = 16,93\ \Omega \cdot (9,84\ \text{A})^2 = 1.639\ \text{W}$$

tensione sul carico

$$V_C = \frac{P_C}{I \cdot \cos\varphi} = \frac{1.639\ \text{W}}{9,84\ \text{A} \cdot 0,8} = 208\ \text{V}$$

Si poteva arrivare alla tensione sul carico, in modo approssimato, anche utilizzando l'equazione di caduta in linea

$$\Delta V_L = R_L \cdot I \cdot \cos\varphi + X_L \cdot I \cdot \text{sen}\ \varphi = 2\ \Omega \cdot 9,84\ \text{A} \cdot 0,8 + 1\ \Omega \cdot 9,84\ \text{A} \cdot 0,6 = 21,65\ \text{V}$$

$$V_C = V - \Delta V = 230\ \text{V} - 21,65\ \text{V} = 208,35\ \text{V}$$

ESERCIZIO 3

Un carico in alternata monofase da 230 V, 50 Hz, 2 kW, cos φ = 0,8, è alimentato a distanza con un cavo che presenta una resistenza R_L = 2 Ω e una reattanza X_L = 1 Ω (come nell'esercizio 2). Determinare il valore del condensatore da porre in parallelo al carico per rifasarlo completamente. Determinare poi la reale potenza attiva consumata dal carico e la tensione effettivamente presente ai suoi morsetti, una volta rifasato.

Soluzione

Per rifasare il carico bisogna compensarlo con una potenza reattiva capacitiva di pari valore

$$A_C = \frac{P_C}{\cos\varphi} = \frac{2.000\ \text{W}}{0,8} = 2.500\ \text{VA}$$

$$\varphi = \arccos\ (0,8) = 36,87°$$

$$\mathrm{tg}\ \varphi = \mathrm{tg}\ 36,87° = 0,75$$

$$Q_C = P_C \cdot \mathrm{tg}\ \varphi = 2.000\ W \cdot 0,75 = 1.500\ VAR$$

Serve una reattanza capacitiva

$$X = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{(230\ V)^2}{1.500\ VAR} = 35,26\ \Omega$$

cioè un condensatore

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot X} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 35,26} = 90,3\ \mu F$$

Una volta rifasato, per il teorema di Boucherot, il carico si presenta solo resistivo e consuma 2.000 W a 230 V, perciò

$$R_C = \frac{V^2}{P} = \frac{(230\ V)^2}{2.000\ W} = 26,45\ \Omega$$

$$R_T = R_L + R_C = 2 + 26,45 = 28,45\ \Omega$$

$$X_T = X_L + X_C = 1 + 0 = 1\ \Omega$$

$$Z_T = \sqrt{R_T^2 + X_T^2} = 28,47\ \Omega$$

$$\cos\varphi_T = \frac{R_T}{Z_T} = \frac{28,45\ \Omega}{28,47\ \Omega} = 1$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{230\ V}{28,47\ \Omega} = 8,08\ A$$

$$\Delta V_L = R_L \cdot I \cdot \cos\varphi + X_L \cdot I \cdot \mathrm{sen}\ \varphi =$$
$$2\ \Omega \cdot 8,08\ A \cdot 1 + 1\ \Omega \cdot 8,08\ A \cdot 0 = 16,16\ V$$

$$V_C = V - \Delta V = 230\ V - 16,16\ V = 213,8\ V$$

o anche

$$V_C = R_C \cdot I = 26,45\ \Omega \cdot 8,08\ A = 213,7\ V$$

In queste condizioni, il carico consuma una potenza

$$P_C = R_C \cdot I^2 = \frac{V_C^2}{R_C} = \frac{(213,7\ V)^2}{26,45\ \Omega} = 1.727\ W$$

Poiché il fattore di potenza del carico non cambia, la potenza reattiva del carico si è ridotta a

$$Q_C = P_C \cdot \mathrm{tg}\ \varphi = 1.727\ W \cdot 0,75 = 1.295\ VAR$$

perfettamente compensata dal condensatore di rifasamento, difatti

$$Q = \frac{V^2}{X} = \frac{(213,7\ V)^2}{35,26\ \Omega} = 1.295\ VAR$$

è stato quindi corretto calcolare il condensatore di rifasamento lavorando inizialmente sui valori del carico a piena tensione.

ESERCIZI DA SVOLGERE

ESERCIZIO 1

Dei carichi presenti nello schema di fig. 5 sono noti i seguenti valori: P_1 = 500 W, Q_1 = –400 VAR, Q_2 = 200 VAR, Q_3 = –200 VAR, P_3 = 500 W. Sapendo che V_i = 230 V, determinare i valori delle correnti I e I_A.

[Ris.: I = 4,68 A; I_A = 2,17 A]

ESERCIZIO 2

Un carico in alternata monofase da 230 V, 50 Hz, 1,6 kW, cos φ = 0,9 è alimentato a distanza con un cavo che presenta una resistenza R_L = 3 Ω e una reattanza X_L = 1 Ω. Determinare la reale potenza attiva consumata dal carico e la tensione effettivamente presente ai suoi morsetti.

[Ris.: P_C = 1.309 W; V_C = 208 V]

ESERCIZIO 3

Un carico in alternata monofase da 230 V, 50 Hz, 1,6 kW, cos φ = 0,9 è alimentato a distanza con un cavo che presenta una resistenza R_L = 3 Ω e una reattanza X_L = 1 Ω (come nell'esercizio 34). Determinare il valore del condensatore da porre in parallelo al carico per rifasarlo completamente. Determinare poi la reale potenza attiva consumata dal carico e la tensione effettivamente presente ai suoi morsetti, una volta rifasato.

[Ris.: C = 46,6 μF; V_C = 211 V; P_C = 1.345 W]