web 03 Semplificazione delle reti logiche

Si vuole sperimentare l'utilizzo di alcune proprietà e di alcuni teoremi dell'algebra di Boole (George Boole, matematico inglese, 1815-1864) per la semplificazione di circuiti logici combinatori.

Algebra di Boole

L'algebra di Boole definisce alcune relazioni significative tra le variabili logiche, utili per la semplificazione delle espressioni combinatorie, facilmente verificabili impiegando le relative tabelle della verità.

Per esempio, la relazione Y = A + 0 può essere semplificata con la sola Y = A, difatti:

- se A vale 1, l'espressione diventa 1 + 0 = 1 e quindi è uguale ad A;
- se A vale 0, diventa 0 + 0 = 0 e quindi è ancora uguale a A.

I due risultati possono quindi essere sintetizzati con la relazione:

$$A + 0 = A$$

In tab. 1 sono riportate altre relazioni significative.

$A + 0 = A$	$A \cdot 0 = 0$
$A + 1 = 1$	$A \cdot 1 = A$
$A + A = A$	$A \cdot A = A$
$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$

Tab. 1 Alcune relazioni significative tra variabili logiche.

Queste relazioni permettono di semplificare le espressioni logiche, riducendone i termini.
Le operazioni AND e OR, inoltre, godono delle proprietà commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma e rispetto al prodotto; proprietà che correttamente impiegate consentono di semplificare ulteriormente le espressioni logiche.

Proprietà commutativa: se viene cambiato l'ordine delle variabili il risultato non cambia.

$$Y = A + B = B + A$$

$$Y = A \cdot B = B \cdot A$$

Proprietà associativa: nella somma o nel prodotto di tre o più variabili, è possibile raggruppare le variabili in qualunque modo.

$$Y = A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$Y = A\,B\,C = (A\,B) \cdot C = A \cdot (B\,C)$$

Proprietà distributiva rispetto alla somma: un'espressione binaria può essere espansa o ridotta, raccogliendo a fattore comune, come nell'algebra normale.

$$Y = A \cdot (B + C) = A\,B + A\,C$$

$$Y = \overline{A}\,B + \overline{A}\,C = \overline{A} \cdot (B + C)$$

Proprietà distributiva rispetto al prodotto: è la più difficile da ricordare e da applicare perché non ha una corrispondente nell'algebra normale.

$$Y = A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

Esercizio svolto n. 1

Esercizio da svolgere n. 1

Teorema di De Morgan

Questo teorema prende il nome dal matematico britannico August De Morgan (1806 –1871) che l'ha proposto, è molto utilizzato nell'algebra di Boole e può essere espresso mediante le relazioni seguenti:

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B}$$

Rompere un negatore significa quindi cambiare l'operatore e negare ciascuno degli ingressi.

Esercizio svolto n. 2

Esercizi da svolgere n. 2, 3, 4, 5

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1
Semplificare le seguenti espressioni, utilizzando i teoremi dell’algebra di Boole:

$Y_1 = \overline{A}B\overline{C} + BC + AB\overline{C}$

$Y_2 = ABC + A\overline{B} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$

Soluzione

$$Y_1 = B\overline{C} \cdot (\overline{A} + A) + BC = B\overline{C} + BC = B \cdot (\overline{C} + C) = B$$
$$Y_2 = BC \cdot (\overline{A} + A) + A\overline{B} \cdot (1 + C) = BC + A\overline{B}$$

ESERCIZIO 2
Dato il circuito in fig. 1, ricavare la funzione Y e semplificarla.

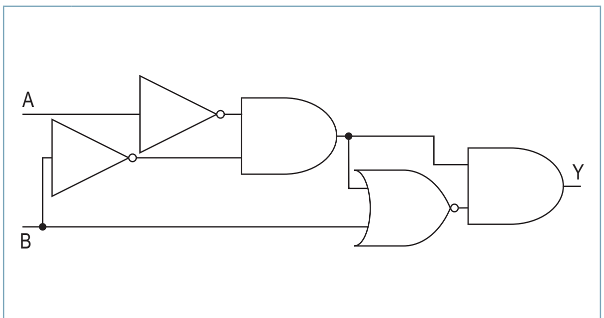

Fig. 1

Soluzione

$$Y = \overline{((\overline{A}\ \overline{B}) + B)} \cdot \overline{A}\ \overline{B} = \overline{\overline{A}\ \overline{B}} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A}\ \overline{B}$$
$$= (A + B) \cdot \overline{A}\ \overline{B} = A\ \overline{A}\ \overline{B} + B\ \overline{A}\ \overline{B} = 0$$

ESERCIZI DA SVOLGERE

ESERCIZIO 1
Semplificare le espressioni che seguono, utilizzando i teoremi dell’algebra di Boole:

- $Y_1 = \overline{A}B\overline{C} + BC + AB\overline{C}$ [Ris.: $Y_1 = B$]
- $Y_2 = ABC + A\overline{B} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$ [Ris.: $Y_2 = BC + A\overline{B}$]
- $Y_3 = \overline{A}B + AC + C \cdot (B + C)) + \overline{C} \cdot (AC + C)$ [Ris.: $Y_3 = \overline{A}B + C$]
- $Y_4 = \overline{A}\overline{B}D + \overline{D} + BD + A\overline{B}D$ [Ris.: $Y_4 = 1$]

ESERCIZIO 2
Dato il circuito in fig. 2, ricavare la funzione Y e semplificarla.

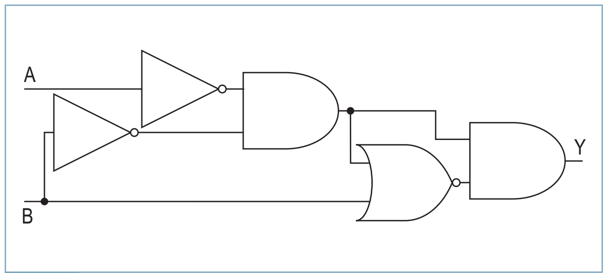

Fig. 2

[Ris.: Y = 0]

ESERCIZIO 3
Dato il circuito in fig. 3, ricavare la funzione f e semplificarla.

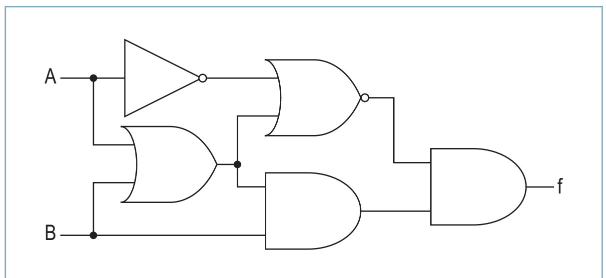

Fig. 3

[Ris.: f = 0]

ESERCIZIO 4
Dato il circuito in fig. 4, ricavare la funzione f e semplificarla.

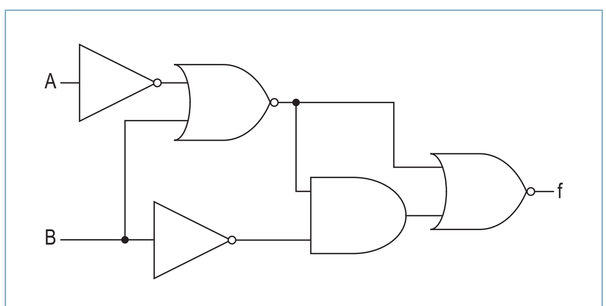

Fig. 4

[Ris.: $f = \overline{A} + B$]

ESERCIZIO 5
Semplificare le espressioni logiche seguenti, applicando ripetutamente il teorema di De Morgan.

$\overline{(A + B + \overline{C})} \cdot \overline{(AB + CD)} + \overline{BCD}$ [Ris.: $\overline{BCD}$]

$AB + \overline{AB} + C$ [Ris.: 1]