Le equazioni

1. Identità ed equazioni

Le espressioni algebriche nelle quali compaiono le variabili (nel nostro caso a, b), scritte in questo modo:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

si dicono **uguaglianze**.

L'espressione a sinistra del segno di uguaglianza si chiama **primo membro**; quella a destra **secondo membro**.

Consideriamo l'uguaglianza:

$(3a + b)^2 \quad = \quad 9a^2 + 6ab + b^2$

primo membro = secondo membro

e sostituiamo alle variabili i valori:

$a = 2$ e $b = -3$

otteniamo:

1° membro: $(3 \cdot 2 - 3)^2 = (6 - 3)^2 = 3^2 = 9$

2° membro: $9 \cdot (2)^2 + 6 \cdot 2 \cdot (-3) + (-3)^2 = 9 \cdot 4 - 36 + 9 = 36 - 36 + 9 = +9$

Se ad a e a b si attribuiscono valori diversi, l'uguaglianza è sempre verificata.

Le uguaglianze verificate per qualsiasi valore attribuito alle lettere che in esse figurano, si dicono **identità**:

$4x - x = 3x$	primo membro	secondo membro	l'uguaglianza si è verificata?
se $x = 1$	$4 \cdot 1 - 1 = 3$	$3 \cdot 1 = 3$	si
se $x = 2$	$4 \cdot 2 - 2 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$	si
se $x = 3$	$4 \cdot 3 - 3 = 9$	$3 \cdot 3 = 9$	si
se $x = 4$	$4 \cdot 4 - 4 = 12$	$3 \cdot 4 = 12$	si

Le uguaglianze verificate solo per particolari valori attribuiti alle lettere che in essa figurano si dicono **equazioni**.

Consideriamo l'uguaglianza:

$3x + 5 = 14$

e osserviamo la seguente tabella:

$3x + 5 = 14$	primo membro	secondo membro	l'uguaglianza si è verificata?
se $x = 1$	$3 \cdot 1 + 5 = 8$	14	no
se $x = 2$	$3 \cdot 2 + 5 = 11$	14	no
se $x = 3$	$3 \cdot 3 + 5 = 14$	14	sì
se $x = 4$	$3 \cdot 4 + 5 = 17$	14	no

L'uguaglianza è verificata solo per $x = 3$; essa è, quindi, un'**equazione**.
Risolvere un'equazione significa trovare quei valori delle lettere che verificano l'uguaglianza. Le lettere delle quali si ricercano i valori si dicono **incognite**; i valori delle lettere incognite sono le **soluzioni** o **radici** dell'equazione.

> Si dicono **soluzioni** di un'equazione quei valori che, sostituiti alle incognite, rendono vera l'uguaglianza.
> +3 è la soluzione dell'equazione
> Due **equazioni** sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.
> $x + 1 = 4 \quad 2x - 2 = 4$

Le due equazioni sono formalmente diverse ma hanno le stesse soluzioni $x = 3$.

$3 + 1 = \mathbf{4} \quad 2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2 = \mathbf{4}$

Le equazioni si differenziano in relazione al numero di incognite che contengono e al grado in cui esse compaiono.
Il **grado di un'equazione** è dato dall'esponente con cui l'incognita appare:

- se l'incognita x ha come esponente 1, si ha un'equazione di primo grado a un'incognita;
  $x + 5 = 6$ è un'equazione di primo grado a un'incognita
- se l'incognita x ha come esponente 2, si ha un'equazione di secondo grado a un'incognita.
  $x^2 = 25$ è un'equazione di secondo grado a un'incognita
  $3x^2 - 3x + x = 2x - 1$ è un'equazione di secondo grado a un'incognita

Le equazioni si dicono **numeriche intere** e **numeriche fratte** (con l'incognita al denominatore) quando non contengono altre lettere oltre l'incognita x:

$11x + 2 = x + 10$	$3x + \frac{1}{x} = 2$
numerica intera	**numerica fratta**

Le equazioni si dicono **letterali** quando, oltre l'incognita x, contengono altre lettere che rappresentano dei numeri:

$(bx + 1) \cdot (bx - 1) = (bx + 2)^2$

2. Principi di equivalenza delle equazioni

> Due equazioni che hanno le stesse soluzioni si dicono **equivalenti**.
> $2x = 4 \quad$ e $\quad x + 2 = 4$

I principi di equivalenza delle equazioni sono due regole fondamentali che permettono di trasformare un'equazione in altre equivalenti più semplici, semplificando, di passaggio in passaggio, la complessità dell'equazione. Questi principi sono validi per tutti i tipi di equazioni e sono utili per facilitare l'individuazione delle soluzioni delle equazioni.

1° principio di equivalenza

> **Addizionando** o **sottraendo** ai due membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita (che abbia significato per qualunque valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Consideriamo l'equazione:

$2x - 8 = x - 3$

e applichiamo il primo principio di equivalenza togliendo a entrambi i membri la x

$2x - 8 - x = x - 3 - x$

Dopo aver eseguito i calcoli otteniamo l'equazione:

$x - 8 = -3$

che è equivalente all'equazione di partenza.
Applichiamo nuovamente il primo principio di equivalenza aggiungendo a entrambi i membri il numero 8:

$x - 8 + 8 = -3 + 8$

Dopo aver eseguito i calcoli si ottiene:

$x = 5$

In un'equazione si può anche trasportare un termine da un membro all'altro, cambiandogli il segno; così facendo si ottiene un'equazione equivalente alla data.

> In qualsiasi equazione un termine si può **spostare** da un membro all'altro purché venga cambiato di segno.
> $x - \mathbf{8} = -3 \quad \rightarrow \quad x = -3 \mathbf{+ 8}$

Consideriamo l'equazione:

$3x - 2 = 6x - 2$

e applichiamo il primo principio di equivalenza aggiungendo a entrambi i membri +2

$3x - 2 + 2 = 6x - 2 + 2$

Dopo aver eseguito le semplificazioni otteniamo l'equazione:

$3x = 6x$

Dall'osservazione dei passaggi precedenti deduciamo un'altra conseguenza del primo principio di equivalenza: se nei due membri dell'equazione compaiono due termini uguali, uno per ogni membro, questi possono essere eliminati.

$3x \mathbf{- 2} = 6x \mathbf{- 2} \quad = \quad 3x = 6x$

2° principio di equivalenza

> **Moltiplicando** o **dividendo** i due membri di un'equazione per uno stesso numero o per una stessa espressione (diversa da zero e non contenente l'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.

Consideriamo l'equazione:

$5x + 2 = 2x + 8$

e applichiamo il primo principio di equivalenza sottraendo $2x$ ai due membri:

$5x + 2 - 2x = 2x + 8 - 2x$

Dopo aver eseguito i calcoli si ottiene l'equazione:

$3x + 2 = 8$

Applichiamo nuovamente il primo principio di equivalenza sottraendo 2 a entrambi i membri:

$3x + 2 - 2 = 8 - 2$

e otteniamo:

$3x = 6$

Per trovare la soluzione dell'equazione applichiamo il secondo principio di equivalenza dividendo i due membri per 3:

$$\frac{3x}{3}=\frac{6}{3}$$

per cui

$x = 2$

Riprendiamo l'equazione di partenza:

$5x + 2 = 2x + 8$

e applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando entrambi i membri per –1 e otteniamo:

$-5x - 2 = -2x - 8$

che è un'equazione equivalente a quella di partenza, infatti, se procediamo con la sua risoluzione otteniamo la stessa soluzione:

$-5x + 2x = +2 - 8$

$-3x = -6$

$$-\frac{3x}{3}=-\frac{6}{3}$$

$-x = -2$

$x = 2$

> Se si moltiplicano ambo i membri di un'equazione per –1, si cambiano i segni di tutti i termini e si ottiene un'equazione equivalente alla data:
> $-4x + 3x = -3 - 2 \quad = \quad +4x - 3x = +3 + 2$