La risoluzione di un sistema con il metodo Cramer

Per l'uso di questo metodo è necessario introdurre il concetto di **matrice.**

Una matrice è una tabella ordinata di elementi, per esempio: $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix}$

Le matrici sono ampiamente usate in matematica e nelle scienze per la loro capacità di rappresentare in maniera sintetica diversi oggetti matematici, come i coefficienti delle incognite e i termini noti presenti nelle equazioni che costituiscono sistemi lineari.
Le righe orizzontali di una matrice sono chiamate **righe**, mentre quelle verticali **colonne**.
Gli elementi vengono indicati con a_{ij} dove **i** indica la riga e **j** la colonna dove l'elemento è posizionato; nell'esempio che segue, una matrice di 2 righe e 3 colonne, (in breve matrice 2 *x* 3), si ha

$$\begin{bmatrix} a_{11} = 1 & a_{12} = -5 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = -2 & a_{22} = \frac{1}{3} & a_{23} = 4 \end{bmatrix}$$

Se il numero di righe è uguale al numero di colonne la matrice si dice **quadrata**.
Per le matrici vengono introdotte diverse operazioni come la somma, il prodotto di un numero (scalare) per una matrice, il prodotto di due matrici e, utilizzato per la soluzione dei sistemi lineari, il calcolo del determinante di una matrice quadrata.

Il **determinante** (Δ) di una matrice quadrata di ordine 2 è il numero ottenuto sottraendo al prodotto dei termini della diagonale principale il prodotto dei termini della diagonale secondaria.

Per esempio, nel caso di una matrice (2 *x* 2):
per la matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ si definisce **determinante** l'espressione:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Si veda ora come la soluzione del sistema, dove le due equazioni si presentano come di seguito, $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ possa essere ricavata dal calcolo dei determinanti di opportune matrici, con il metodo di Cramer.
Il metodo di Cramer, in relazione al sistema considerato, si riconduce a considerare i determinanti:

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot e - b \cdot d$ relativo alla matrice dei coefficienti delle incognite (prima le x poi le y)

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ b & e \end{vmatrix} = c \cdot e - b \cdot f$ ottenuto da D sostituendo alla colonna dei coefficienti della x la colonna deitermini noti

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = a \cdot f - c \cdot d$ ottenuto da Δ sostituendo alla colonna dei coefficienti della y la colonna dei termini noti

La soluzione è data dalla coppia: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ e $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

Il sistema è determinato se $\Delta \neq 0$
Nei casi in cui:

$\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ il sistema è indeterminato;
$\Delta = 0$ e $\Delta_x \neq 0$ o $\Delta_y \neq 0$ il sistema è impossibile.

Esempi

1 $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x + y = 9 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1) - (-6 \cdot 1) = 9$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = (0 \cdot 1) - (-6 \cdot 9) = 54$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 - 0 \cdot 1 = 23$$

$$x = \frac{54}{9} = 6 \quad y = \frac{27}{9} = 3$$

Soluzione (6; 3).

2 $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ x - 2y = 9 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - (-6 \cdot 1) = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) - (-6 \cdot 9) = 54$$

non è necessario calcolare Δ_y perché il sistema è impossibile, essendo $\Delta_x \neq 0$.

3 $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 6 + 8y = 14 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 14 & 8 \end{vmatrix} = 7 \cdot 8 - 4 \cdot 14 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot 14 - 7 \cdot 6 = 0$$

Il sistema è indeterminato.