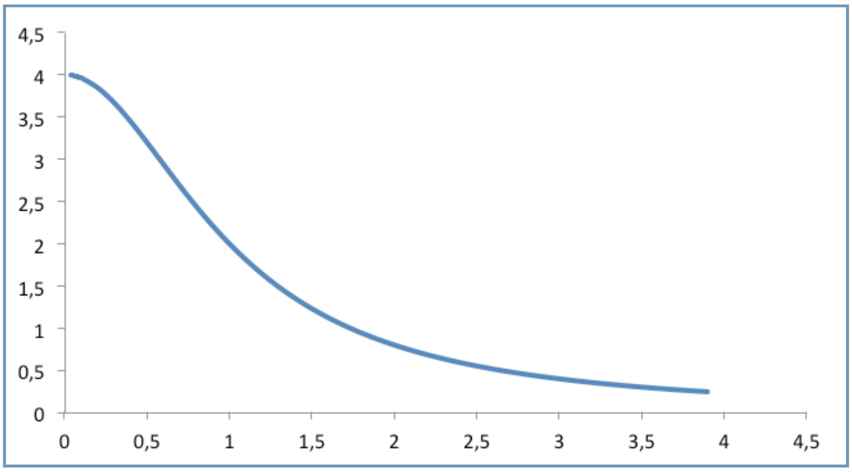
Le derivate

Si consideri come esempio la funzione $y = \frac{4}{x^2+1}$, per $x > 0$, che rappresenta come varia *il prezzo y* di un certo bene, quando *la disponibilità x* delle materie prime utilizzate per la sua produzione aumenta. Il grafico è rappresentato di seguito.



La diminuzione del prezzo, all'aumentare della disponibilità, è inizialmente poco evidente, poi diventa più rapida, ma successivamente sembra esaurirsi.
Quando si considera un fenomeno oltre al fatto che ci siano aumenti o diminuzioni di una grandezza all'aumentare di un'altra, da cui la prima dipende, può essere interessante anche considerare la velocità di tale variazione, quindi vedere quando vi è crescenza o decrescenza e valori di massimo o di minimo.
Lo strumento che permette di determinare come vari un fenomeno, rappresentato da una funzione di equazione $y = f(x)$, è a sua volta una funzione detta derivata di $y = f(x)$ **che si indica con** $y' = f'(x)$.

Formule per il calcolo delle derivate di alcune funzioni

Il calcolo della funzione derivata può essere fatto direttamente applicando alla funzione $f(x)$ le formule illustrate nella tabella seguente:

	Funzione	Funzione derivata
Funzione costante	$y = k$	$y' = 0$
Funzione potenza in particolare	$y = x^n \quad n \in Q$ $y = x$	$y' = n \cdot x^{n-1}$ $y' = 1$
Potenza di funzione	$y = f^n(x) \quad n \in Q$	$y' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
Funzione somma	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
Funzione prodotto in particolare in particolare	$y = f(x) \cdot g(x)$ $y = k \cdot f(x)$ $y = k \cdot x$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $y' = k \cdot f'(x)$ $y' = k$
Funzione quoziente	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Calcola, utilizzando le formule di derivazione le derivate di:

1 $y = 5 \qquad y' = 0$

2 $y = x^3 \qquad y' = 3x^2$

3 $y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad y' = -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$ (si rivedano potenze a esponente negativo)

4 $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad y' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (si rivedano potenze a esponente frazionario)

5 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \qquad y' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

6 $y = x^3 - 3x + 2 \qquad y' = 3x^2 - 3$

7 $y = \left(x^3 - x\right)^5 \qquad y' = 5\left(x^3 - x\right)^4\left(3x^2 - 1\right)$

8 $y = \dfrac{1}{x^2+1} = \left(x^2+1\right)^{-1} \qquad y' = -\left(x^2+1\right)^{-2} \cdot 2x = \dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$

9 $y = \dfrac{x^3}{x+1} \qquad y' = \dfrac{3x^2 \cdot (x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$

Poiché la derivata di una funzione è, a sua volta, una funzione, è possibile calcolarne la derivata e ancora l'operazione si può ripetere, ottenendo la derivata seconda, y'', la derivata terza, y''', ecc., della funzione di partenza.
Si noti come alcune caratteristiche del grafico, per esempio la concavità e i flessi di una funzione, si determinano con lo studio della derivata seconda.

Calcola, dopo la derivata prima, la derivata seconda.

1 $y = 5 \qquad y' = 0 \qquad y'' = 0$

2 $y = x^3 \qquad y' = 3x^2 \qquad y'' = 6x$

3 $y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad y' = -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3} \qquad y'' = 6x^{-4} = \dfrac{6}{x^4}$

4 $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad y' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \qquad y'' = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$

5

$$y = \frac{1}{x^2+1} = \left(x^2+1\right)^{-1} \quad y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x)\cdot 2(x^2+1)(2x)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{\cancel{(x^2+1)}\,(-2x^2 - 2 + 8x^2)}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{(6x^2-2)}{(x^2+1)^3}$$

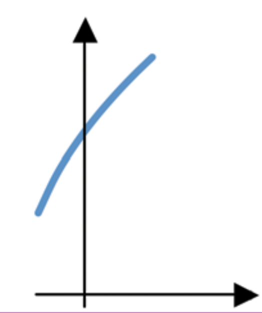
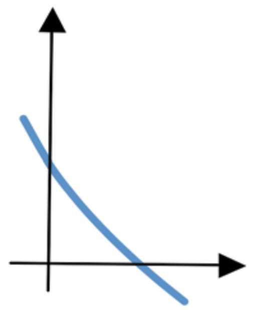
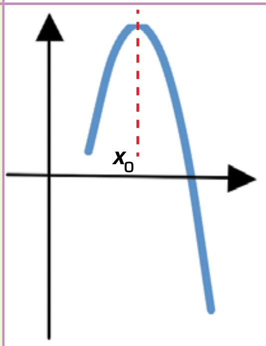
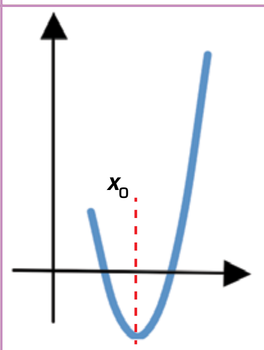
6

$$y = \frac{x^3}{x+1} \qquad y' = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2} \quad y'' = \frac{(6x^2+6x)(x+1)^2 - (2x^3+3x^2)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(x+1)\cdot\ (6x^2+6x)\cdot(x+1) - (2x^3+3x^2)\cdot 2}{(x+1)^4} = \frac{{}^{2}\cancel{4}x^3 + 6x^2 + 6x}{(x+1)^3}$$

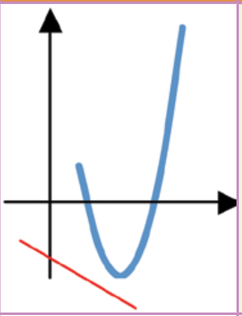
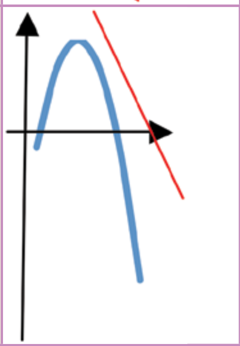
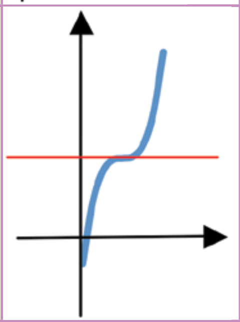
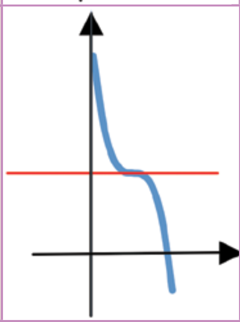
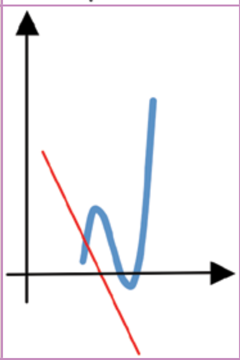
La derivata prima di una funzione razionale fratta $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta al denominatore una potenza di esponente pari e segno positivo. Anche se possibile, solitamente non si semplifica per non perdere tale caratteristica. Si osservi, invece, che nella derivata seconda si raccoglie al numeratore il fattore comune $g(x)$ e si semplifica per snellire i calcoli.

La funzione derivata prima, come detto in precedenza, consente l'analisi di alcune caratteristiche del grafico di una funzione, quali crescenza, decrescenza, presenza di punti di massimo e minimo relativi. Si veda il seguente quadro riassuntivo relativo a funzioni continue e derivabili in un intervallo $(a; b)$ e con i punti x_0 , x_1 e x_2 appartenenti a tale intervallo.

Caratteristica di $y = f(x)$ in $(a; b)$	Grafico esemplificativo	Caratteristica della derivata prima
$y = f(x)$ è crescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$		$f'(x) > 0$
$y = f(x)$ è decrescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$		$f'(x) < 0$
x_0 è punto di massimo relativo e $f(x_0)$ è un massimo relativo se per $x \neq x_0$ $f(x) \leq f(x_0)$		$f'(x) > 0$ per $x < x_0$ $f'(x_0) = 0$ $f'(x) < 0$ per $x > x_0$
x_0 è punto di minimo relativo e $f(x_0)$ è un minimo relativo se per $x \neq x_0$ $f(x) \geq f(x_0)$		$f'(x) < 0$ per $x < x_0$ $f'(x_0) = 0$ $f'(x) > 0$ per $x > x_0$

Si osservi che per determinare massimi e minimi di una funzione in un intervallo non è però sufficiente lo studio della derivata prima.
Vanno presi in considerazione i punti dove la derivata prima è nulla, quelli dove la funzione esiste ma non è derivabile e i valori assunti dalla funzione agli estremi dell'intervallo considerato, se appartenenti a esso.
Altre caratteristiche di una funzione sono la sua concavità verso l'alto o verso il basso e la determi-

nazione dei punti dove la concavità stessa cambia, quali i flessi a tangente orizzontale o a tangente obliqua, ricavabili tramite lo studio della derivata seconda, illustrati nella tabella che segue.

Caratteristica di y = f (x) in (a; b)	**Grafico esemplificativo**	**Caratteristica delle derivate**
Essere concava verso l'alto (convessa) nell'intervallo (a; b). In ogni punto della funzione, nell'intervallo, esiste una retta tale che la funzione non sta mai sotto tale retta.		per ogni x dell'intervallo: $f''(x) > 0$
Essere concava verso il basso (concava) nell'intervallo (a; b) In ogni punto della funzione, nell'intervallo, esiste una retta tale che la funzione non sta mai sopra tale retta.		per ogni x dell'intervallo: $f''(x) < 0$
x_0 è punto di flesso a tangente orizzontale ascendente		$f'(x) > 0$ per $x < x_0$ $f'(x_0) = 0$ $f'(x) > 0$ per $x > x_0$
x_0 è punto di flesso a tangente orizzontale discendente		$f'(x) < 0$ per $x < x_0$ $f'(x_0) = 0$ $f'(x) < 0$ per $x > x_0$
x_0 è punto di flesso a tangente obliqua se nel punto la curva cambia concavità		$f'(x_0) \neq 0$ $f''(x_0) = 0$ e rispettivamente per $x < x_0$ e per $x > x_0$ $f''(x) < 0$ – $f''(x) > 0$ $f''(x) > 0$ – $f''(x) < 0$

Le primitive di una funzione

Il calcolo della derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ è un'operazione che ha come operazione inversa quella che associa a $f'(x)$ una funzione, che ha questa ultima come derivata.

Esempio

Se $f'(x) = 4x^3$ una funzione che ha tale derivata è $f'(x) = x^4$, ma anche $g(x) = x^4 - 3$ o ancora $g(x) = x^4 + \sqrt{3}$ …

Si scopre che se l'operazione di derivazione ha un solo risultato, l'operazione inversa ha infiniti risultati, perché la derivata delle costanti è sempre uguale a zero.
Ogni funzione che ha per derivata $g(x)$ si dice primitiva di $g(x)$
Le primitive di una funzione, se esistono, sono infinite e differiscono fra loro per una costante.
L'insieme delle primitive di una funzione prende il nome di **integrale indefinito** e viene indicato con il simbolo:

$$G(x) = \int g(x)\ dx$$

(leggi: integrale indefinito di g(x) in dx)
Il simbolo dx indica la variabile rispetto a cui si cerca la primitiva.

Esempio

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = \sqrt{x} + c$$

Nel risultato è presente la costante additiva c che indica tutte le costanti non determinabili univocamente.
Per l'operazione di integrazione indefinita di $g(x)$, in alcuni casi elementari si ha:

Regole di integrazione	
$\int 1\ dx = x + c$	
$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + c$	
$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	con $n \neq -1$
$\int g^n(x) \cdot g^1(x) = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + c$	con $n \neq -1$

Alcune proprietà degli integrali indefiniti
$\int k \cdot g(x)\ dx = k \cdot \int g(x) dx$
$\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$

Esempio

$$\int 3x\ dx = 3 \cdot \int x\ dx = \frac{3}{2}x^2 + c$$

$$\int \frac{2}{x^2}\ dx = 2 \cdot \int x^{-2} dx = -\frac{2}{x} + c$$

$$\int \left(x + 2x^2 - x^3\right)\ dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$\int \left(x+1\right)^5 dx = \frac{\left(x+1\right)^6}{6} + c$$

$$\int \sqrt{5+x}\,dx = \int \left(5+x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{\left(5+x\right)^3} + c$$