unità didattica 10 I radicali

1. Radicali quadratici

Si consideri la potenza 3^2.
Calcolando tale potenza, si ottiene $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
Ricordando che la radice quadrata è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza con esponente 2 possiamo anche scrivere

$\sqrt{9} = 3$

e, quindi, dire che $\sqrt{9} = 3$ perché $3^2 = 9$

Si consideri un'altra potenza con esponente 2: $\left(\frac{3}{7}\right)^2$

Calcolando tale potenza si ottiene: $= \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

Anche in questo caso si può scrivere

$\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$ e, quindi, dire che $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$ perché $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$

Generalizzando, si può dare la seguente definizione di radice quadrata di un numero.

> Si definisce **radice quadrata** di un numero reale *a* positivo o nullo, quel numero reale *b* positivo o nullo che elevato al quadrato sia uguale ad *a*.
> In simboli:
> $\sqrt{a} = b$ se e solo se $b^2 = a$
> dove $a, b \in R$, con $a, b \geq 0$

La definizione sopra proposta pone delle limitazioni su *a* e *b*: *a* e *b* devono essere due numeri positivi o nulli.

Osservazioni

– **Non si può estrarre la radice quadrata di un numero negativo**.
Si consideri la scrittura $\sqrt{-25}$ $(a = -25)$

Se tale radice esistesse, bisognerebbe trovare un numero *b* tale che $b^2 = -25$
Nell'insieme *R* dei numeri reali non esiste alcun numero che elevato al quadrato dia come risultato un numero negativo.
Ne consegue che l'estrazione di radice quadrata è possibile, nel campo reale, solo per numeri reali *a* positivi o nulli.

Scritture come $\sqrt{-8}, \sqrt{-16}$ non hanno significato in *R*.

Ecco perché nella definizione compare la scrittura "*a* positivo o nullo".

– **La radice quadrata di un numero positivo (o nullo) è un numero positivo (o nullo)**.
Si considerino le due potenze: $(-6)^2$ e $(+6)^2$
È noto che $(-6)^2 = 36$ e $(+6)^2 = 36$
I due numeri opposti –6 e +6 sono tali che il loro quadrato è lo stesso, cioè 36.
Estraendo la radice quadrata di 36 ci si trova di fronte a un'ambiguità: essa sarà uguale a –6, a +6 o a tutti e due i valori?
Quindi
$\sqrt{36} = 6$ o $\sqrt{36} = -6$ o $\sqrt{36} = \pm 6$?
Per convenzione si è deciso di scegliere la scrittura $\sqrt{36} = 6$, cioè con b positivo (6 nell'esempio).
Ecco perché nella definizione compare la scrittura "b positivo o nullo".

Esempi

1 $\sqrt{64} = 8$

2 $\sqrt{-10}$ non è un numero reale: l'espressione non ha significato in R

3 $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

4 $\sqrt{2} = 1{,}414\ \ldots\ \ldots$

Dagli esempi **1** e **3** si nota che la radice quadrata di un numero che è un quadrato perfetto restituisce un numero naturale o una frazione.
La radice quadrata di un numero che non è un quadrato perfetto, (esempio **4**), è un numero irrazionale, cioè un numero decimale illimitato non periodico.
Quando, nei prossimi paragrafi, si opererà su numeri irrazionali come $\sqrt{2}, \sqrt{5}$, non si considererà la loro approssimazione decimale, ma si opererà direttamente con i radicali, cioè si svolgeranno operazioni come, per esempio $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$; $\sqrt{5} : \sqrt{2}$; ecc.

2. Terminologia relativa ai radicali

La scrittura $\sqrt{a}$ è detta **radicale quadratico**, dove:
- $\sqrt{}$ rappresenta il **simbolo di estrazione** di radice quadrata;
- a è detto **radicando**;
- 2 è **l'indice della radice** che di solito viene omesso ($\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$).

Casi particolari

$\sqrt{1} = 1$ perché $1^2 = 1$
$\sqrt{0} = 0$ perché $0^2 = 0$

Se l'indice del radicale è uguale a 3, cioè $n = 3$, si parla di **radicale cubico**, per esempio: $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[3]{9}$.
Con la scrittura generica $\sqrt[n]{a}$, cioè radice n-esima di a (che si legge "radice ennesima di a"), si indica l'estrazione di radice di un numero a dove l'indice n è un numero naturale qualsiasi diverso da 0, per esempio: $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[8]{7}$.

In + × te

Altri casi particolari

Se $n = 0$ si ottiene la scrittura $\sqrt[0]{a}$ (per esempio $\sqrt[0]{3}$ che non ha significato;
se $n = 1$ si ottiene $\sqrt[1]{a} = a$ (per esempio $\sqrt[1]{5} = 5$ cioè si ottiene il radicando;
se $n = 2$ o $n = 3$, come già visto, si parla di radicale quadratico o cubico;
se $n \geq 4$ si ottengono radici quarte, quinte, seste, ecc. di un numero.
Per esempio, $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[10]{8}$; $\sqrt[12]{10}$.

3. Radicali con indice *n* pari

Anche per i radicali con indice n pari maggiore di 2 valgono le stesse limitazioni viste per i radicali quadratici.
Quindi scritture come $\sqrt[4]{-8}$ non hanno significato nel campo reale.

Inoltre, come si è visto nel caso dei radicali quadratici, anche qui si pone per convenzione che la radice quarta, sesta, ottava, ecc. di un numero positivo sia un numero positivo.
Verrà ritenuta, quindi, corretta la scrittura

$$\sqrt[6]{64} = 2$$

e saranno considerate, invece, errate scritture del tipo

$$\sqrt[6]{64} = -2 \text{ oppure } \sqrt[6]{64} = \pm 2$$

Si arriva così alla seguente definizione per radice n-esima di un numero a con n pari, definizione che include anche la definizione precedente data per radicale quadratico, cioè per $n = 2$

Dato un **numero naturale *n* pari** maggiore o uguale a 2, si definisce **radice *n*-esima** di un numero reale positivo o nullo a , quel numero reale positivo o nullo b tale che la sua potenza con esponente n sia uguale ad a.
In simboli:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se e solo se } b^n = a$$

dove $a, b \in R$, con $a, b \geq 0$; $\quad n \in N$, n pari ≥ 2

4. Radicali cubici

Si consideri la potenza 2^3
Calcolando tale potenza, si ottiene $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
Ricordando che l'estrazione di radice cubica è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza con esponente 3, possiamo anche scrivere

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

e, quindi, dire che
$\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$

Prendiamo un'altra potenza con esponente 3: $(-3)^3$
Calcolandola, si ottiene: $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
Anche in questo caso si può dire che

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \text{ perché } (-3)^3 = -27$$

Da quest'ultimo esempio si vede che si può estrarre la radice cubica anche di numeri negativi, a differenza di quanto visto per i radicali quadratici (e, più in generale, di indice pari).

Nell'estrazione di radice cubica di un numero negativo, si ottiene un numero negativo. Nelle radici cubiche (e così per tutti i radicali con indici dispari), **la radice cubica di un numero reale esiste sempre ed è un numero reale**.

Si definisce **radice cubica** di un numero reale a, quel numero reale b che elevato al cubo sia uguale ad a.
In simboli:
$\sqrt[3]{a} = b$ se e solo se $b^3 = a$
dove $a, b \in R$

5. Radicali con indice *n* dispari

Per i radicali con indice dispari maggiore di 3 valgono le stesse considerazioni viste per i radicali cubici: l'estrazione di radice con indice dispari può essere effettuata per qualsiasi numero reale a.
Per esempio:
– $\sqrt[5]{32} = 2$ perché $2^5 = 32$
– $\sqrt[7]{-1} = -1$ perché $(-1)^7 = -1$
– $\sqrt[9]{0} = 0$ perché $0^9 = 0$

Si arriva alla seguente definizione per radice n-esima di un numero a con n dispari, definizione che include anche la definizione precedente data per radicale cubico, cioè per $n = 3$ e il caso $n = 1$.
Si ricordi che per $n = 1$ vale $\sqrt[1]{a} = a$

Dato un **numero naturale *n* dispari**, si definisce **radice *n*-esima** di un numero reale a, quel numero reale b tale che la sua potenza con esponente n sia uguale ad a.
In simboli:
$\sqrt[n]{a} = b$ se e solo se $b^n = a$
dove $a, b \in R$; $n \in N$, n dispari

6. Proprietà invariantiva dei radicali

Prima di presentare la proprietà invariantiva dei radicali, è necessario fare una importante premessa: **tale proprietà risulta valida e utilizzabile solo se il radicando *a* è un numero positivo o nullo**.
Per i radicali con indice pari, infatti, non si avranno problemi perché il radicando a, in base alla definizione data, deve essere positivo o nullo.
Invece, per i radicali di indice dispari che possono ammettere anche radicandi negativi, la proprietà sarà applicabile solo dopo aver trasformato i radicandi positivi con un accorgimento evidenziato nell'esempio che segue.
Si considerino i due radicali

$\sqrt[3]{-27}$ e $-\sqrt[3]{27}$

risolvendoli si ottiene

$\sqrt[3]{-27} = -3$ e $-\sqrt[3]{27} = -3$

Dal momento che i due risultati coincidono, si può anche dire che

$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27}$

Dall'esempio si deduce che il segno *meno* del radicando si può portare fuori dal simbolo di radice cubica facendo diventare il radicando positivo.
Questo risultato si può generalizzare per qualsiasi estrazione di radice con indice n dispari di un radicando a negativo. Quindi, in generale vale il seguente risultato

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

dove $a \in R$; $n \in N$, n dispari.
Grazie a questa proprietà dei radicali con indice dispari, i radicandi negativi possono diventare positivi e, in tal modo, si può applicare anche per loro la proprietà invariantiva.

> Dato un radicale, se si moltiplicano l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero naturale diverso da 0, il suo valore non cambia.
> In simboli:
> $$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}$$
> dove $a \in R$, $a \geq 0$; $\quad n, m, r \in N$ con $n, m, r \neq 0$

Esempi

1 Si consideri $\sqrt{3}$
Si moltiplica l'indice e l'esponente del radicando per **2** (cioè $r = 2$) e si ottiene

$$\sqrt{3} = \sqrt[2]{3} = \sqrt[2\cdot 2]{3^{1\cdot 2}} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9}$$

2 Si consideri $\sqrt[4]{36}$
Si riscrive 36 come potenza di 6 e si moltiplica indice ed esponente del radicando per **4** ($r = 4$) e si ottiene

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt[4\cdot 4]{6^{2\cdot 4}} = \sqrt[16]{6^8}$$

3 Si consideri $\sqrt[3]{25}$
Si riscrive 25 come potenza di 5 e si moltiplica indice ed esponente del radicando per **3** ($r = 3$) e si ottiene

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3\cdot 3]{5^{2\cdot 3}} = \sqrt[9]{5^6}$$

4 Si consideri $\sqrt[3]{-4}$
Si riscrive 4 come potenza di 2 e prima di applicare la proprietà invariantiva si modifica il radicale rendendo il radicando positivo. Quindi

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4} = -\sqrt[3]{2^2}$$

Si moltiplica l'indice e l'esponente per **2** ($r = 2$) e si ottiene

$$-\sqrt[3]{2^2} = -\sqrt[3\cdot 2]{2^{2\cdot 2}} = -\sqrt[6]{2^4} = -\sqrt[6]{16}$$

Applicazione della proprietà invariantiva: semplificazione di un radicale

Data l'uguaglianza precedente $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}}$ che rappresenta la proprietà invariantiva, se si scambiano i due membri, si ottiene l'uguaglianza $\sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}} = \sqrt[n]{a^m}$ che esprime la cosiddetta **semplificazione dei radicali**.

Dato un radicale, se si dividono l'indice della radice e l'esponente del radicando per un loro divisore comune, il suo valore non cambia.
In simboli:
$\sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}} = \sqrt[n]{a^m}$
dove $a \in R$, $a \geq 0$; $n, m, r \in N$ con $n, m, r \neq 0$

Esempi

1 Si consideri $\sqrt[4]{64}$
Si riscrive 64 come potenza di base 2 e si ottiene
$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6}$
Dal momento che 4 e 6, rispettivamente indice ed esponente del radicando sono numeri pari, possiamo dividerli per **2** e si ottiene
$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4:2]{2^{6:2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

Osservazione
Il radicale ottenuto, $\sqrt{2^3}$, viene detto **IRRIDUCIBILE** perché il massimo comun divisore fra l'indice 2 e l'esponente 3 è uguale a 1: M.C.D. (2, 3) = 1.
Di solito, quando si semplifica un radicale si cerca di ottenere un radicale irriducibile; per far ciò basta dividere sia l'indice che l'esponente del radicando per il loro massimo comun divisore (M.C.D.).

2 Si consideri $\sqrt[24]{2^{16}}$
Dal momento che il M.C.D. (24, 16) = **8**, dividendo per tale numero sia il 16 sia il 24 , si ottiene un radicale irriducibile
$\sqrt[24]{2^{16}} = \sqrt[24:8]{2^{16:8}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

3 Si consideri $\sqrt[3]{8}$
È noto che $\sqrt[3]{8} = 2$ quindi applicando la semplificazione di radicali, si ottiene lo stesso risultato 2. Si riscrive, quindi, il radicando come potenza di base 2
$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3}$
Dividendo indice ed esponente per **3** si ottiene
$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3:3]{2^{3:3}} = \sqrt[1]{2^1} = 2$

Osservazione
In generale, se l'indice n e l'esponente del radicando sono uguali, si ha
$\sqrt[n]{a^n} = a$
dove $a \in R$, $a \geq 0$ $n \in N$, $n \neq 0$
Quindi, per esempio $\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^4} = \frac{1}{4}$

4 Si consideri $\sqrt[3]{-64}$

Si riscrive il radicale nel seguente modo

$-\sqrt[3]{64} = -\sqrt[3]{2^6}$

Dividendo per **3** sia l'indice che l'esponente, si ottiene

$-\sqrt[3]{2^6} = -\sqrt[3:3]{2^{6:3}} = -2^2 = -4$

In + × te

Proprietà invariantiva

Nell'applicazione della proprietà invariantiva si è detto che è necessario che il radicando sia positivo o nullo. La spiegazione è deducibile attraverso l'esempio che segue.
Si consideri il seguente radicale

$\sqrt[3]{-2}$

che è un radicale negativo. Si applica la proprietà invariantiva, moltiplicando per **2** sia l'indice sia l'esponente

$\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3\cdot 2]{(-2)^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}$

si ottiene

$\sqrt[3]{-2} = \sqrt[6]{4}$

Il primo membro dell'uguaglianza è negativo, mentre il secondo membro è positivo. L'uguaglianza è quindi falsa e ciò è dovuto al fatto che è stata applicata la proprietà invariantiva su radicandi negativi.
Per evitare errori, quindi, bisogna applicare la proprietà invariantiva **solo su radicandi positivi**, in tal modo si evitano incongruenze come quella appena trovata relativamente al segno.

Quindi se si vuole applicare correttamente la proprietà invariantiva sul radicale $\sqrt[3]{-2}$, i passaggi da seguire sono i seguenti:

$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3\cdot 2]{2^{1\cdot 2}} = -\sqrt[6]{4}$

Ora l'uguaglianza $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[6]{4}$ è corretta perché preserva il segno meno sia nel primo sia nel secondo membro.

7. Il prodotto di due radicali

Il **prodotto di due radicali** aventi lo stesso indice è un radicale avente per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi. In simboli:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

dove $a, b \in R$ nel caso n dispari; $a,b, \in R$ e $a, b \geq 0$ nel caso n pari, $n \in N$, $n \neq 0$

Esempi

1 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12}$

2 $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = 3$

Osservazione

Dall'esempio si deduce che moltiplicando un radicale quadratico per se stesso, si ottiene il radicando. In generale

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ con $a \in R$, $a \geq 0$

3 $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{2 \cdot 11} = \sqrt[3]{22}$

4 $\sqrt[3]{-4} \cdot \sqrt[3]{-6} = \sqrt[3]{(-4) \cdot (-6)} = \sqrt[3]{24}$

Si poteva anche procedere trasformando prima i radicandi in positivi e poi calcolare il prodotto. Il risultato non cambia

$\sqrt[3]{-4}\cdot\sqrt[3]{-6}=-\sqrt[3]{4}\cdot\left(-\sqrt[3]{6}\right)=\sqrt[3]{4\cdot 6}=\sqrt[3]{24}$

L'uguaglianza $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ si può leggere anche al contrario, da destra verso sinistra, ottenendo

$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

5 $\sqrt{15}=\sqrt{5\cdot 3}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$

6 $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8\cdot 2}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}=2\cdot\sqrt[3]{2}$

8. Il quoziente di due radicali

Il **quoziente di due radicali** (di cui il secondo diverso da 0) aventi lo stesso indice è un radicale avente per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.
In simboli: $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$

o equivalentemente, si può scrivere $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

dove $a, b\in R$, $b\neq 0$ nel caso n dispari; $a, b\in R$ e $a\geq 0$, $b>0$ nel caso n pari; $n\in N$, $n\neq 0$

Esempi

1 $\sqrt{5}:\sqrt{2}=\sqrt{5:2}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

2 $\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}:\sqrt[4]{\dfrac{15}{8}}=\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}:\dfrac{15}{8}}=\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{15}}=\sqrt[4]{\dfrac{2}{5}}$

3 $\sqrt[3]{9}:\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{9:3}=\sqrt[3]{3}$

4 $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{-4}}=\sqrt[3]{-\dfrac{8}{4}}=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$

L'uguaglianza $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)$ si può leggere anche al contrario, da destra verso sinistra, ottenendo:

$\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)$

5 $\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

6 $\sqrt[3]{\dfrac{27}{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$

9. Somma e differenza di radicali

Si consideri la seguente espressione contenente somme e differenze di radicali

$2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+7\sqrt{3}$

Nell'esempio proposto $2\sqrt{3}$ e $7\sqrt{3}$ presentano lo stesso radicale $\sqrt{3}$

Per eseguire l'addizione si raccoglie a fattor comune $\sqrt{3}$ quindi

$2\sqrt{3}+7\sqrt{3}=\sqrt{3}(2+7)=9\sqrt{3}$

L'espressione di partenza diventa, quindi

$2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+7\sqrt{3}=9\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

Non si può semplificare ulteriormente l'espressione perché i radicali presenti sono diversi.
Da ciò si deduce che si possono eseguire somme e sottrazioni di radicali **solo su radicali "simili"**, che presentano cioè uno stesso radicale con uguale indice e radicando, eventualmente moltiplicato per un coefficiente numerico.
Si considerano, per esempio, simili, le seguenti coppie di radicali:

$2\sqrt{7}$ e $5\sqrt{7}$; $\quad -8\sqrt{2}$ e $6\sqrt{2}$; $\quad 13\sqrt[3]{7}$ e $-2\sqrt[3]{7}$

Esempi

1 Si consideri la seguente espressione

$3\sqrt{7}+2\sqrt{2}-4\sqrt{7}+5\sqrt{3}+2\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

Si sommano i radicali simili utilizzando un raccoglimento a fattor comune e svolgendo successivamente i calcoli nelle parentesi

$$3\sqrt{7}+2\sqrt{2}-4\sqrt{7}+5\sqrt{3}+2\sqrt{3}+6\sqrt{2}=\sqrt{7}(3-4)+\sqrt{2}(2+6)+\sqrt{3}(5+2)=$$
$$=-\sqrt{7}+8\sqrt{2}+7\sqrt{3}$$

2 Si consideri la seguente espressione

$3\sqrt[3]{2}+7\sqrt{2}-\sqrt{2}+8\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{-2}$

Si riscrive l'espressione trasformando l'ultimo radicale con radicando positivo e, successivamente, si procede con il raccoglimento a fattor comune

$$3\sqrt[3]{2}+7\sqrt{2}-\sqrt{2}+8\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{-2}=3\sqrt[3]{2}+7\sqrt{2}-\sqrt{2}+8\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{2}=$$
$$=\sqrt[3]{2}(3-4)+\sqrt{2}(7-1)+8\sqrt[3]{5}=-\sqrt[3]{2}+6\sqrt{2}+8\sqrt[3]{5}$$

Osservazione

Si osservino con attenzione i seguenti esempi per evitare gravi errori con radicali quadratici aventi diverso radicando:

$\sqrt{36}+\sqrt{64}\neq\sqrt{36+64}$

Infatti, $\sqrt{36}+\sqrt{64}=6+8=14$ mentre $\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

$\sqrt{25}-\sqrt{9}\neq\sqrt{25-9}$

Infatti, $\sqrt{25}-\sqrt{9}=5-3=2$ mentre $\sqrt{25-9}=\sqrt{14}$

In generale:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b} \qquad \sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$

AA. VV., *Corso di matematica PLUS*

10. Il trasporto di un fattore sotto il segno di radice

Si consideri il seguente radicale $2\sqrt{3}$

Si vuole portare sotto il segno di radice il fattore 2. Ricordando che $2=\sqrt{2^2}$ e la regola relativa al prodotto di radicali , si può anche scrivere

$$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$$

Dall'esempio si vede che il fattore 2 è stato portato sotto il segno di radice come 2^2, cioè come potenza di esponente 2 coincidente con l'indice della radice.
Per i radicali quadratici vale la seguente uguaglianza relativa al trasporto di un fattore sotto il segno di radice

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2 b}$$

dove $a, b \in R$, con $a, b \geq 0$

Osservazione

Il fattore a che viene portato all'interno della radice quadrata deve essere positivo.
Per fattori negativi viene lasciato fuori il segno *meno* e viene portato sotto radice solo il coefficiente numerico privato del segno.

$$-5\sqrt{2}=-\sqrt{5^2\cdot 2}=-\sqrt{50}$$

Dati più radicali (di indice qualsiasi) moltiplicati per un fattore a, tale fattore (positivo nel caso n pari) può essere portato all'interno della radice elevandolo a una potenza con esponente uguale all'indice n della radice.
In simboli:

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$$

dove $a, b \in R$, con $a, b \geq 0$ se n è pari; $a, b \in R$, se n è dispari; $n \in N, n \neq 0$

Esempi

1 $3\sqrt{7}=\sqrt{3^2\cdot 7}=\sqrt{63}$

2 $-5\sqrt{\dfrac{4}{5}}=-\sqrt{5^2\cdot\dfrac{4}{5}}=-\sqrt{5\cdot 4}=-\sqrt{20}$

3 $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^3\cdot 4}=\sqrt[3]{32}$

4 $-3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{(-3)^3\cdot 2}=\sqrt[3]{(-27)\cdot 2}=\sqrt[3]{-54}=-\sqrt[3]{54}$

Si poteva anche procedere portando dentro la radice solo il 3 senza segno negativo:
$-3\sqrt[3]{2}=-\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=-\sqrt[3]{27\cdot 2}=-\sqrt[3]{54}$

11. Il trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

L'uguaglianza

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$$

letta da destra verso sinistra, diventa

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$$

e permette di trasportare fuori dal segno di radice un fattore a.
Se si considera tale uguaglianza per $n = 2$, cioè radicali quadratici, si ottiene

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

Applicando tale uguaglianza possiamo portare fuori dalla radice quadrata un fattore a positivo con esponente uguale a 2.
Si consideri $\sqrt{18}$
Scomponendo 18 in fattori primi e applicando la regola sopra citata si ottiene

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Si poteva giungere allo stesso risultato anche applicando la regola relativa al prodotto di radicali e, successivamente, la semplificazione di radicali

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Si consideri ora $\sqrt{162}$
Scomponendo in fattori primi 162 e applicando la regola relativa al prodotto di radicali e, successivamente, la semplificazione di radicali, si ottiene

$$\sqrt{162} = \sqrt{3^4 \cdot 2} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{2} = 3^2 \cdot \sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

Anche in questo caso si è riusciti a portar fuori il fattore 3 dal segno di radice. Questo è stato possibile perché 3 ha come esponente (sotto radice) 4 che è un multiplo di 2, indice della radice.
Ogni volta che, scomponendo in fattori primi il radicando si ottengono fattori con esponente **multiplo dell'indice**, tali fattori possono essere portati fuori. Per far ciò basta applicare le proprietà relative al prodotto di radicali e alla semplificazione di radicali.
Tale discorso si può estendere anche a radicali con indice n qualsiasi.

Esempi

1 $\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

2 $\sqrt{243} = \sqrt{3^5}$

In questo caso l'esponente 5 è maggiore dell'indice 2, ma non è multiplo di 2.
Per procedere si cerca di riscrivere 3^5 in modo da avere potenze con esponente multiplo di 2, per esempio: $3^5 = 3^4 \cdot 3$
Quindi

$$\sqrt{243} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \cdot 3} = \sqrt{3^4} \cdot \sqrt{3} = 3^2 \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

3 $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 3\sqrt{4}$

4 $\sqrt[3]{-81} = -\sqrt[3]{81} = -\sqrt[3]{3^4} = -\sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = -\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -3\sqrt[3]{3}$

12. La potenza di un radicale

Si consideri il radicale $\sqrt[3]{5}$

e si vuole calcolare $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$

Per definizione di potenza di un numero, è noto che

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5}$$

Applicando la regola relativa al prodotto di radicali si può ulteriormente scrivere

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^2}$$

quindi si ottiene

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$$

cioè l'elevamento al quadrato del radicale $\sqrt[3]{5}$ ha portato ad avere un radicale con lo stesso indice 3 ma con il radicando elevato al quadrato.
Tale risultato si può generalizzare per un radicale di indice n qualsiasi.

> La **potenza *m*-esima** (si legge "emmesima") **di un radicale** è un radicale avente per indice lo stesso indice del radicale di partenza e per radicando lo stesso radicando con esponente m.
> In simboli: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
> dove $a \in R$, con $a \geq 0$ se n è pari; $a \in R$, se n è dispari; $n, m \in N$, $n \neq 0$

Esempi

1 $\left(\sqrt{3}\right)^2 = \sqrt{3^2} = 3$

Dall'esempio si deduce che se l'indice della radice e l'esponente sono uguali (nell'esempio $n = 2$) si ottiene il radicando stesso.

2 $\left(\sqrt[4]{2}\right)^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

3 $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$

4 $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^4 = \sqrt[3]{(-2)^4} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

13. La razionalizzazione del denominatore di una frazione

La razionalizzazione del denominatore di una frazione consiste nel trasformare una frazione che presenta al denominatore uno o più radicali in una frazione con il denominatore senza radicali.
Per semplicità si prendono in considerazione solo i casi riguardanti radicali quadratici.

CASO 1 – Il denominatore della frazione presenta un solo radicale

Si consideri la frazione $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Per togliere il radicale dal denominatore, si procede moltiplicando sia il numeratore sia il denominatore per $\sqrt{5}$.

Quindi

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

L'espressione ottenuta non contiene più radicali al denominatore.
In generale, se al denominatore è presente un solo radicale quadratico per razionalizzare il denominatore della frazione si procede moltiplicando sia il numeratore sia il denominatore per quel radicale.

Esempi

1 $$\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

2 $$-\frac{3}{2\sqrt{6}}=-\frac{3\cdot\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{3\sqrt{6}}{2\left(\sqrt{6}\right)^2}=-\frac{3\sqrt{6}}{12}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

CASO 2 – Il denominatore della frazione presenta una somma o una sottrazione di 2 termini, di cui almeno uno è un radicale

Si consideri la frazione

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

Ricordando il prodotto notevole $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$, si moltiplicano sia il numeratore sia il denominatore per $2+\sqrt{3}$ in modo tale da avere al denominatore il prodotto notevole $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

L'espressione ottenuta ha denominatore 1, quindi non presenta più radicali al denominatore.
In generale, se al denominatore è presente una differenza del tipo $a-\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ per razionalizzare tale denominatore si procede moltiplicando il numeratore e il denominatore della frazione per la somma $a+\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; viceversa se al denominatore è presente una somma del tipo $a+\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ per razionalizzare il denominatore si procede moltiplicando il numeratore e il denominatore della frazione per la differenza $a-\sqrt{b}$ o $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Esempi

1 $$\frac{6}{\sqrt{3}+1}=\frac{6}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}=$$
$$=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=3\left(\sqrt{3}-1\right)$$

2 $$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$
$$=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}$$

Esercizi

1 Calcola, se possibile, i seguenti radicali quadratici:

$\sqrt{81}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{\frac{36}{25}}$; $\sqrt{-\frac{9}{64}}$; $\sqrt{21}$ [9; non esiste in R; $\frac{6}{5}$; non esiste in R; 11]

2 Calcola i seguenti radicali cubici:

$\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$; $\sqrt[3]{216}$; $\sqrt[3]{-1}$ [-3; 4; $\frac{5}{2}$; 6; -1]

3 Utilizzando una calcolatrice scrivi i seguenti radicali come numeri decimali determinando le prime 3 cifre dopo la virgola:

$\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{6}$ $\sqrt[3]{3}$ [2,236; 1,259; 2,449; 1,442]

Semplifica, se possibile, i seguenti radicali in modo da renderli irriducibili:

4 $\sqrt[4]{2^2}$; $\sqrt[8]{3^6}$; $\sqrt[3]{4^6}$ [$\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{27}$; 16]

5 $\sqrt{3^2}$; $\sqrt[3]{6^3}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[18]{2^{12}}$ [3; 6; già irriducibile; $\sqrt[3]{4}$]

6 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt{\frac{25}{9}}$; $\sqrt[4]{64}$ [$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\sqrt{8}$]

7 $\sqrt[15]{27}$; $\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[10]{\frac{1}{32}}$ [$\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[3]{2}$; già irriducibile; $\sqrt{\frac{1}{2}}$]

Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni fra radicali:

8 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$; $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$ [3; 4; 10; 12]

9 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; $\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ [$\sqrt{8}$; 6; $\sqrt{14}$; 3]

10 $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{10}{6}}$; $\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{12}{25}}$; $\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{5}}$; $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{81}{14}}$ [1; $\sqrt{\frac{6}{5}}$; $\sqrt[3]{18}$; $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$]

11 $\sqrt{25}:\sqrt{5}$; $\sqrt{36}:\sqrt{6}$; $\sqrt{20}:\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{3}$ [$\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{2}$; 3]

12 $\sqrt{\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}:\sqrt{\frac{12}{18}}$; $\sqrt[3]{-3}:\sqrt[3]{-5}$; $\sqrt[4]{4}:\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$ [$\sqrt{\frac{2}{3}}$; 1; $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$; 2]

13 $\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{16}}:\sqrt[3]{4}$ [1]

14 $\sqrt{12}:\left(\sqrt{8}:\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$ [$\sqrt{\frac{5}{4}}$]

Calcola le seguenti somme algebriche di radicali:

15 $2\sqrt{5}-\sqrt{6}+3\sqrt{5}+8\sqrt{6}+\sqrt{2}$ [$5\sqrt{5}+7\sqrt{6}+\sqrt{2}$]

16 $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$ [$4\sqrt{2}$]

17 $\sqrt{7}+5\sqrt{2}-2\left(\sqrt{7}+3\right)+4\left(\sqrt{2}+1\right)$ [$-\sqrt{7}+9\sqrt{2}-2$]

Porta dentro il segno di radice il fattore esterno.

18 $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{5}$; $-7\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$ [$\sqrt{12}$; $\sqrt{80}$; $-\sqrt{98}$; $-\sqrt{8}$]

19 $-3\sqrt[3]{2}$; $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$; $\frac{1}{4}\sqrt{8}$; $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ [$-\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{27}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $-\sqrt[3]{2}$]

Dopo aver scomposto in fattori primi il radicando porta fuori dal segno di radice tutti i possibili fattori.

20 $\sqrt{8}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt[3]{54}$ [$2\sqrt{2}$; $3\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$ $3\sqrt[3]{2}$]

21 $\sqrt{20}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{24}$ [$2\sqrt{5}$; $4\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; $2\sqrt{6}$]

Calcola le seguenti potenze di radicali:

22 $\left(\sqrt{2}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{7}\right)^3$; $\left(\sqrt[4]{2}\right)^2$; $\left(\sqrt[5]{3}\right)^3$ [2; 7; $\sqrt{2}$; $\sqrt[5]{27}$]

23 $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$;$\left(\sqrt{2}\right)^3$;$\left(\sqrt[8]{3}\right)^4$;$\left(\sqrt{6}\right)^{12}$ [4; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 6^6]

Semplifica le seguenti espressioni:

24 $3\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{32}$ [$\sqrt{2}$]

25 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+3\left(\sqrt{2}+1\right)-\left(\sqrt{5}\right)^2$ [$3\sqrt{2}$]

26 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}+2\left(\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{3}$ [$5\sqrt{3}+2$]

27 $\left(\sqrt{5}+2\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$ [$13+4\sqrt{5}$]

28 $\sqrt{27}:\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+3\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{24}$ [$\sqrt{6}+9$]

Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni:

29 $\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{7}};\frac{1}{3\sqrt{3}}$ [$\frac{3\sqrt{2}}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{2\sqrt{7}}{7}$; $\frac{\sqrt{3}}{9}$]

30 $\frac{1}{\sqrt{2}+1};\frac{3}{2-\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ [$\sqrt{2}-1$; $-3\left(2+\sqrt{5}\right)$; $2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$; $\frac{2\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{5}$]