Gli integrali - Studio del grafico di una funzione

Per associare a una funzione, di cui si conosca l'equazione $y = f(x)$, il suo grafico sono disponibili diversi programmi applicativi. Lo studio analitico prevede diversi passi, con cui si raccolgono una serie di informazioni che permettono di tracciare nel piano una linea che rappresenta il grafico della funzione, ma in campo scientifico è sicuramente più frequente dover dedurre da un grafico le caratteristiche del fenomeno rappresentato (lettura di un grafico).
Di seguito sono presentati uno studio analitico di funzione e due "letture di grafici".

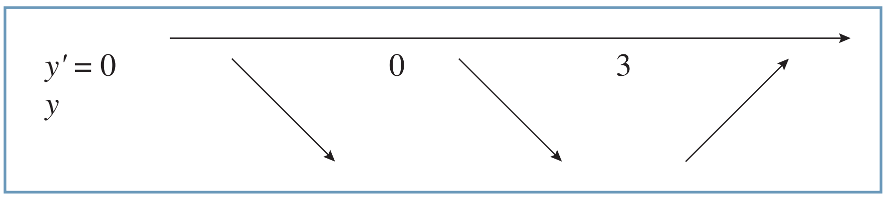
Tracciare il grafico approssimativo di $y = x^4 - 4x^3$

Quali passi sono necessari per ottenere tale grafico analiticamente?

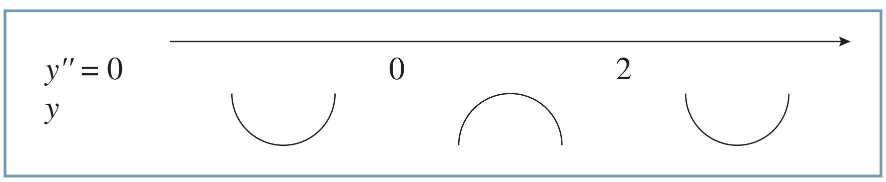
La **determinazione**:
- **del dominio**, in questo caso $(-\infty; +\infty)$ perché la funzione è razionale intera;
- delle **intersezioni con gli assi** (0;0) e (4;0);
- del **segno della funzione**, si ottiene che $y > 0$ se $x < 0$, $x > 4$ e $y < 0$ se $0 < x < 4$
- del **comportamento agli estremi del dominio** $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^4 - 4x^3\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1 - \frac{4}{x}\right) = +\infty$

Per le altre caratteristiche, quali crescenza, decrescenza, presenza di punti di massimo, minimo, si utilizza:
- il **calcolo della derivata prima** $y'\ 4x^3 - 12x^2$
- lo **studio della derivata prima**, rappresentato graficamente e relative conclusioni:
  $y' = 4x^3 - 12x^2 = 0$ per $x = 0$ o $x = 3$
  $y' = 4x^3 - 12x^2 > 0$ per $x = 3$ intervallo dove la funzione è crescente
  $y' = 4x^3 - 12x^2 < 0$ per $x < 0$, $0 < x < 3$ intervalli dove la funzione è decrescente

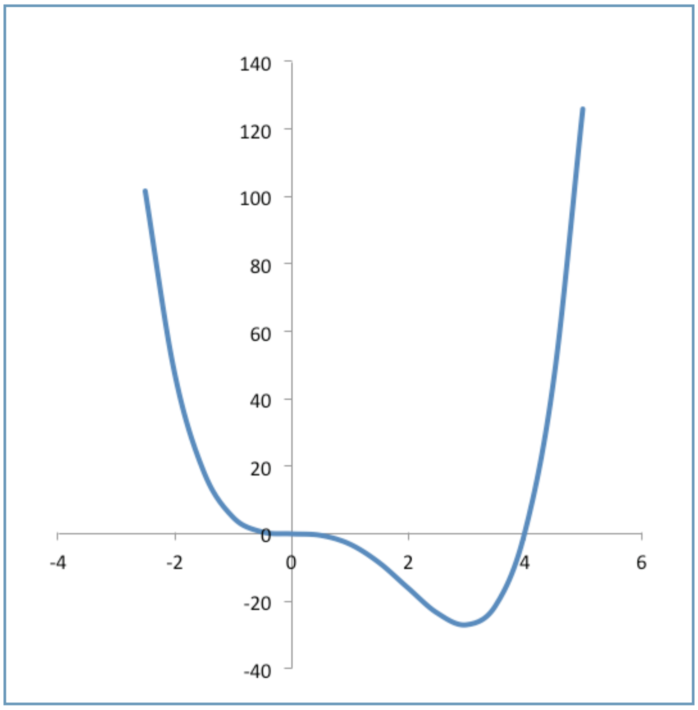
La rappresentazione simbolica:



permette di concludere che:
(0; 0) è flesso a tangente orizzontale discendente;
(3; –27) è minimo relativo (è anche minimo assoluto, nel dominio).
Per concavità e flessi a tangente obliqua si utilizza:
- il **calcolo della derivata seconda** $y'' = 12x^2 - 24x$
- lo **studio della derivata seconda**, rappresentato graficamente e relative conclusioni:
  $y'' = 12x^2 - 24x = 0$ per $x = 0$ e $x = 2$
  $y'' = 12x^2 - 24x > 0$ per $x < 0$ e $x > 2$ intervallo dove la funzione è concava verso l'alto
  $y'' = 12x^2 - 24x < 0$ per $0 < x < 2$ intervalli dove la funzione è concava verso il basso



Grazie alla rappresentazione simbolica si conclude che:
(0; 0) è già stato classificato come flesso a tangente orizzontale discendente;
(2; −16) è flesso a tangente obliqua.
Il grafico, ottenuto considerando i risultati precedenti, è illustrato di seguito.

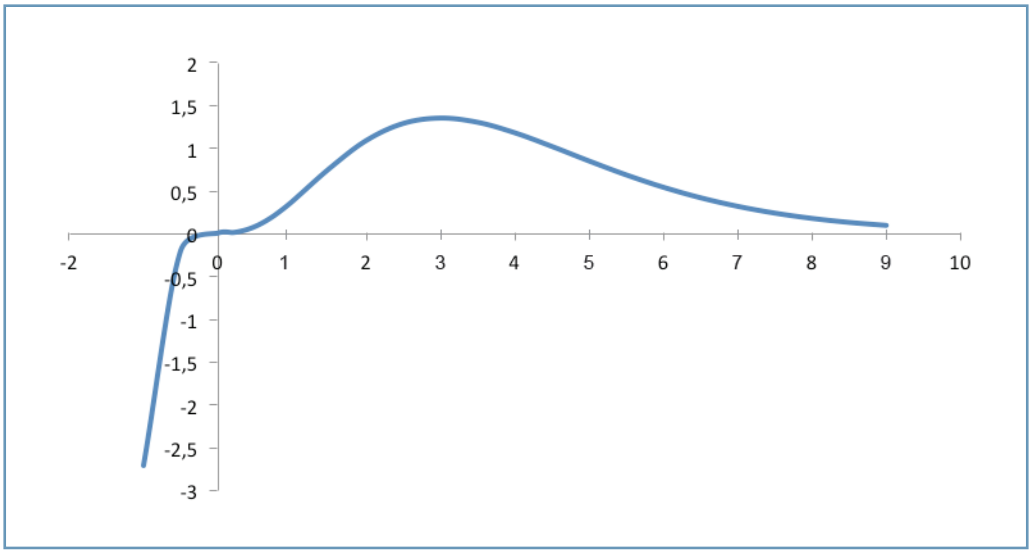


Si osservi l'uso di diverse scale sui due assi, visto il diverso ordine di grandezza dei valori coinvolti.

Dal grafico alle caratteristiche di una funzione

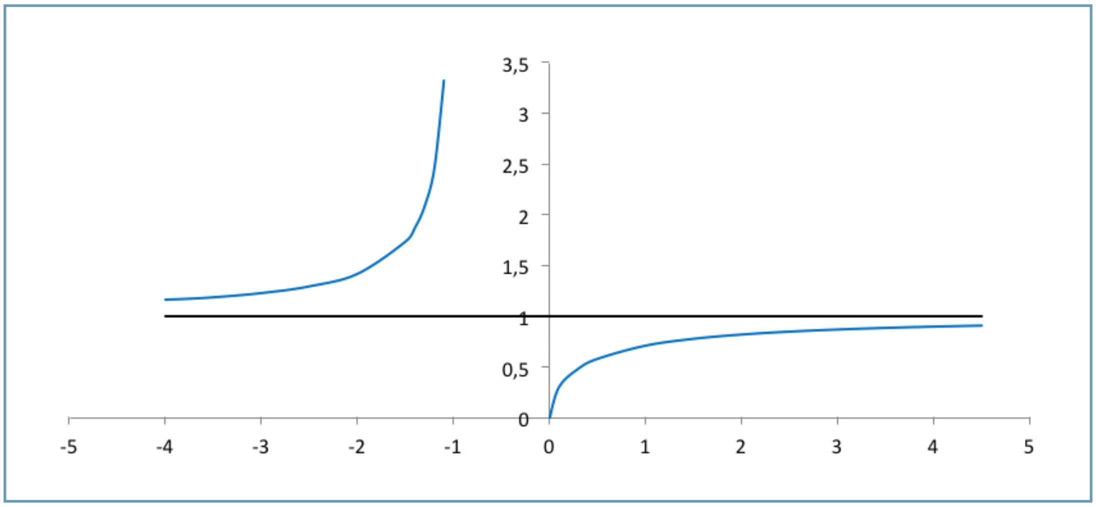
Di seguito sono illustrati due esempi di "lettura del grafico" di una funzione, quali: dominio, segno della funzione, limiti agli estremi del campo di esistenza, crescenza e/o decrescenza, presenza di massimi, minimi e flessi.

1. Del seguente grafico si conoscono le ascisse dei punti di flesso: $x = 0$ e di massimo: $x = 3$



Le altre caratteristiche sono:
1. dominio: $(-\infty; +\infty)$;
2. segno della funzione: $y \geq 0$ se $x \geq 0$; $y < 0$ se $x < 0$
3. limiti agli estremi del campo di esistenza:
   $\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$
   $\lim_{x \to +\infty} y = 0^+$ è presente un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$di equazione $y = 0$
4. derivata prima:
   $y' > 0$ se $x < 0$ o $0 < x < 3$ dove la funzione cresce;
   $y' < 0$ se $x > 3$ dove la funzione decresce;
   $x = 0$ punto di flesso a tangente orizzontale, $x = 3$ punto di massimo relativo e assoluto.

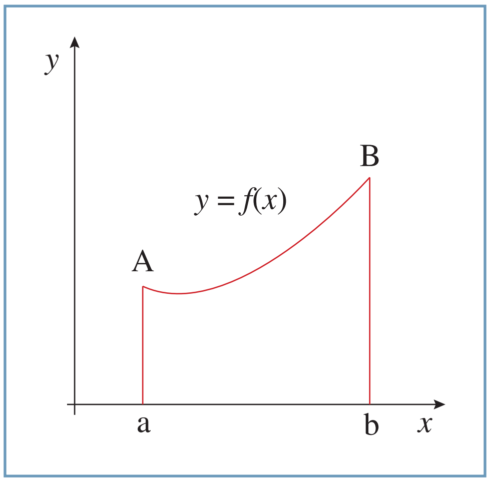
2. Il punto (0; 0) appartiene al seguente grafico:



Le altre caratteristiche sono:
1. dominio: $(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$;
2. codominio: $[0; 1) \cup (1; +\infty)$
3. segno della funzione: $y \geq 0$ per ogni x del dominio
4. limiti agli estremi del campo di esistenza:
   $\lim_{x \to -\infty} y = 1^+$
   $\lim_{x \to -1^-} y = +\infty$
   $\lim_{x \to +\infty} y = 1^-$
   è presente un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$ di equazione $y = 1$ e uno verticale di equazione $x = -1$
5. derivata prima:
   $y' > 0$ se $x < -1$ o $x > 0$ la funzione cresce sempre nel dominio, (0; 0) è minimo relativo e assoluto (in tale punto del grafico la tangente non è parallela all'asse x e quindi la derivata prima non è nulla).

L'integrale indefinito e le lunghezze, le aree, i volumi

Si è già visto come la funzione derivata di $y = f(x)$ fornisca informazioni che permettono la costruzione del suo grafico.



Anche l'integrale indefinito, in simboli $\int f(x)\ dx$, e cioè l'insieme delle primitive di $y = f(x)$ (delle funzioni che hanno per derivata $y = f(x)$), permette di determinare:

- la lunghezza di un arco di tale curva di estremi $A\left(a\,; f(a)\right)$ e $B\ \left(b\,; f(b)\right)$;
- l'area della regione di piano (detta trapezoide) delimitata dall'arco, considerato precedentemente, e dalle rette $y = 0$, $x = a$, $x = b$;
- il volume del solido ottenuto da una rotazione completa, attorno all'asse $y = 0$, della figura considerata nel punto precedente.

L'ipotesi semplificativa posta in testa a queste brevi note "$y = f(x)$ continua e positiva o nulla in un intervallo $[a; b]$" giustifica l'essenzialità della trattazione e il linguaggio utilizzato.

Se $y = F(x)$ è una funzione primitiva di $y = f(x)$ cioè $F'(x) = f(x)$, si dice "integrale definito da a a b di $f(x)$ in dx" e si indica con $\int_a^b f(x)$ la differenza $F(b) - F(a)$.

Si ribadisce ora il concetto che il risultato del calcolo di un integrale indefinito è un insieme di funzioni, mentre quello di un integrale definito è un numero reale, non negativo nelle ipotesi semplificative fatte.

Esempio

Si calcoli $\int_{-3}^{1} x^2\ dx$

La funzione è positiva o nulla in $[-3; 1]$.

Calcolo dell'integrale indefinito: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$;

Calcolo dell'integrale definito: $\int_{-3}^{1} x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3} + c\right]_{-3}^{1} = \frac{1}{3} + c - \frac{-27}{3} - c = \frac{28}{3}$

Si osservi che c, costante che può assumere infiniti valori, non influisce sul calcolo dell'integrale definito, per cui può essere omessa.

Ecco, di seguito, in sintesi i risultati di utilizzo applicativo.

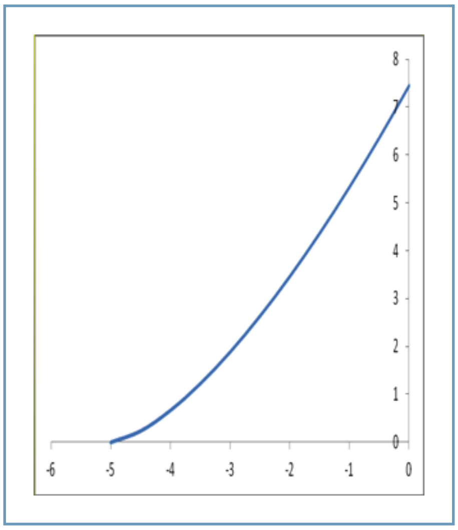
Lunghezza di un arco di $y = f(x)$ di estremi $\left(a\,; f(a)\right)$ e $\left(b\,; f(b)\right)$

Noto il concetto intuitivo di lunghezza di un arco del grafico di una funzione $y = f(x)$, derivabile nell'intervallo considerato, la formula per il calcolo della sua lunghezza è:

$$\ell\left(f;\left[a;b\right]\right)=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}\,dx$$

L'integrale spesso non è di facile soluzione e la presenza di $f'(x)$ nella formula spiega il fatto che la funzione debba essere derivabile.

Ecco un esempio molto semplice: data la funzione $y=\frac{2}{3}\sqrt{\left(5+x\right)^3}$ si calcoli la lunghezza dell'arco di grafico relativo all'intervallo [–5;2] rappresentato in figura:



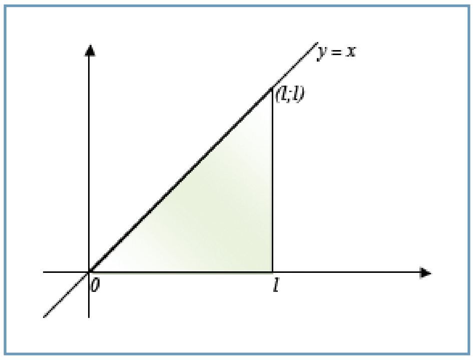
– la derivata prima è: $y'=\sqrt{5+x}$, definita in [–5; 0]

– si calcola: $\int\sqrt{1+\left(\sqrt{5+x}\right)^2}\,dx=\int\sqrt{x+6}\,dx=\int\left(6+x\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{\left(6+x\right)^3}+c$

– infine, si calcola la lunghezza: $\ell\left(f;\left[-5;0\right]\right)=\int_{-5}^{0}\left(6+x\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{\left(6+x\right)^3}\right]_{-5}^{0}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{6^3}-1\right)\cong 9,13$

Un secondo esempio dove si ritrova un risultato noto: si vuole determinare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele avente lato l, $i=\ell\sqrt{2}$.

Si consideri la retta $y = x$ nell'intervallo (0; 0)) e (l; l); la derivata di tale funzione è $y' = 1$ applicando la formula si ottiene: $\ell\left(y=x;\left[0;l\right]\right)=\int_0^l\sqrt{1+1}\,dx=\left[\sqrt{2}\right]_0^l=l\sqrt{2}$

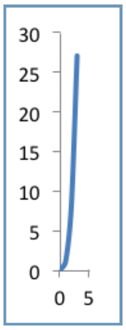


Area della regione di piano delimitata da un arco di $y = f(x)$ e dalle rette $y = 0$, $x = a$, $x = b$
Considerato il trapezoide delimitato da $y = f(x)$, continua e positiva nell'intervallo considerato, e dalle rette citate precedentemente, la formula per il calcolo dell'area è:

$$Area = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dove $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

Esempio



Si determini l'area della regione finita di piano delimitata da $y = x^3$, dagli assi cartesiani e dalla retta $x = 3$:
– la funzione è positiva o nulla in [0; 3]
– si calcola l'integrale indefinito: $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c$
– si calcola l'area: $Area = \int_0^3 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{81}{4}$

Un secondo esempio relativo alla funzione $y = \frac{2}{3}\sqrt{(5+x)^3}$, già considerata in precedenza: si determini l'area del triangolo curvilineo delimitato dal grafico e dagli assi cartesiani:
- la funzione è positiva o nulla in [–5; 0]
- si calcola l'integrale indefinito: $\int \frac{2}{3}\sqrt{(5+x)^3}\,dx = \frac{2}{3}\int (5+x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{4}{15}(5+x)^{\frac{5}{2}} + c$
- si calcola l'area: $Area = \int_{-5}^{0} \frac{2}{3}\sqrt{(5+x)^3}\,dx = \left[\frac{4}{15}(5+x)^{\frac{5}{2}}\right]_{-5}^{0} = \frac{20}{3}\sqrt{5} \cong 14{,}91$

Un terzo esempio dove si ritrova la formula relativa all'area di un triangolo rettangolo isoscele avente lato l, $Area = \frac{l^2}{2}$.
Si consideri la retta $y = x$ nell'intervallo (0; 0)) e (l; l);
applicando la formula si ottiene: $Area = \int_0^l x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{l^2}{2}$

Volume del solido ottenuto da una rotazione completa, attorno all'asse x, della regione di piano delimitata da un arco di $y = f(x)$ e dalle rette $y = 0$, $x = a$, $x = b$
Considerato il trapezoide delimitato da $y = f(x)$, continua e positiva nell'intervallo considerato, e dalle rette citate precedentemente, la formula per il calcolo del volume è:

$$Volume = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

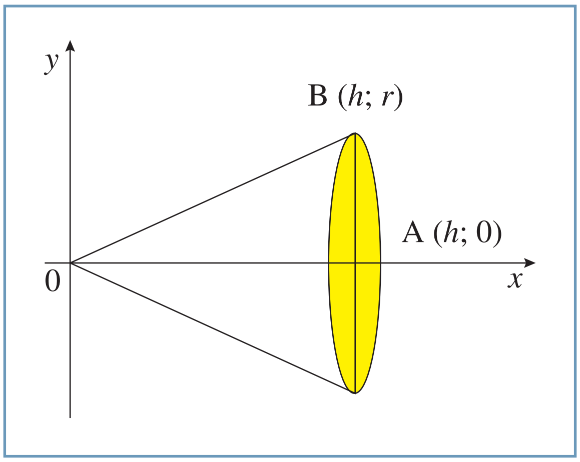
Esempio

Si determini il volume del solido generato da una rotazione completa, attorno all'asse x, della regione finita di piano delimitata da $y = x^3$, dagli assi cartesiani e dalla retta $x = 3$

$$Volume = \pi \cdot \int_0^3 x^6\,dx = \pi \cdot \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^3 = \pi\frac{3^7}{7}$$

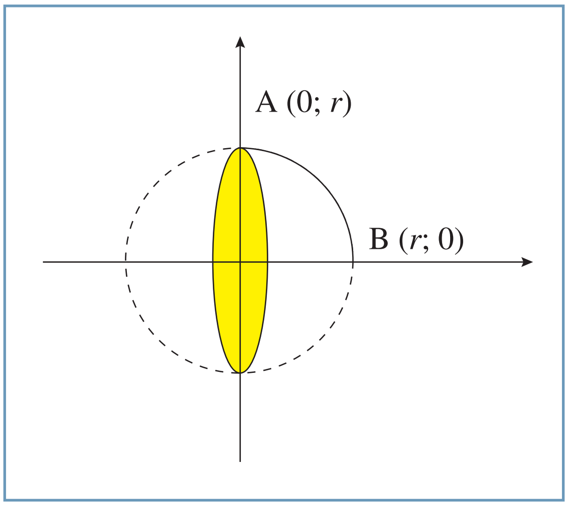
Un secondo esempio dove si ritrova un risultato già conosciuto: si vuole determinare il volume di un cono retto, di altezza h e raggio di base r, e $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Si consideri la retta $y = \frac{r}{h}x$ nell'intervallo (0; 0)) *e* (h; r):



applicando la formula si ottiene: $Volume = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Un terzo esempio dove si ritrova un altro risultato già conosciuto, il volume di una sfera di raggio r, e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$:



La circonferenza con centro in (0; 0) e raggio r ha equazione $x^2 + y^2 = r^2$
L'arco AB ha equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad 0 \leq x \leq r$
La parte di cerchio contenuta nel 1° quadrante genera, in una rotazione completa, una semisfera.
Il volume della sfera è:

$$Volume = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$