

UD1 - LE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

1.1 Equazioni di primo grado numeriche intere e loro risoluzione

Un'equazione intera a un'incognita si dice di **primo grado** (o lineare) quando l'incognita ha esponente uguale a 1.

La forma canonica è $ax = b$

dove x è l'**incognita**, a è il **coefficiente della x** e b è il **termine noto**.

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0 \rightarrow ax = b$ è **determinata**, cioè ammette un'unica soluzione: $x = \frac{b}{a}$

Se $a = 0$ e $b \neq 0 \rightarrow 0x = b$ è **impossibile**, cioè non ammette soluzioni

Se $a = 0$ e $b = 0 \rightarrow 0x = 0$ è **indeterminata**, cioè ammette infinite soluzioni: è un'identità

1.2 Equazioni numeriche frazionarie e loro risoluzione

Un'equazione numerica **frazionaria** presenta almeno una frazione nella quale figura l'incognita al denominatore.

Prima di risolvere un'equazione frazionaria, bisogna impostare le **condizioni di esistenza** (CE). Occorre cioè individuare tutti i valori che, sostituiti all'incognita, rendono nulli i denominatori delle frazioni algebriche presenti. Tali valori non possono essere soluzioni dell'equazione data, perché trasformerebbero l'equazione in un'uguaglianza priva di senso.



1.3 Equazioni letterali intere, frazionarie e loro risoluzione

Un'equazione letterale, oltre l'incognita x , contiene altre lettere, dette **parametri**. Tali lettere rappresentano numeri che si ritengono noti, anche se di essi non è specificato il valore.

Bisogna analizzare separatamente il caso in cui tali espressioni si annullano e il caso in cui non si annullano. Si discute quindi l'equazione che risulterà **determinata**, **indeterminata** o **impossibile** al variare dei valori assunti dai parametri presenti.

Nelle **equazioni letterali intere**, l'incognita non compare mai al denominatore.

Le **equazioni letterali frazionarie** presentano almeno un'incognita al denominatore.

1.4 Problemi ed equazioni di primo grado

I passaggi fondamentali per risolvere tali problemi sono:

- 1) **leggere attentamente il problema** per capire qual è il dato da trovare;
- 2) **scrivere i dati** per evidenziare le relazioni esistenti fra essi;
- 3) **individuare l'incognita**;
- 4) **impostare correttamente l'equazione** per determinare il valore dell'incognita;
- 5) **risolvere l'equazione** e verificare i valori trovati.

UD2 - LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

2.1 Equazioni di secondo grado complete e incomplete

Un'equazione intera, a un'incognita, si dice di **secondo grado** (o quadratica) quando il massimo esponente con cui compare l'incognita è 2.

La forma canonica è $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

dove a , b , c sono numeri reali qualsiasi e sono detti **coefficienti** dell'equazione. c , in particolare, è il termine noto.

Le equazioni di secondo grado possono essere complete o incomplete.

Le equazioni di secondo grado si dicono **complete** se tutti e tre i coefficienti sono diversi da zero.

Le equazioni di secondo grado si dicono **incomplete** quando almeno un coefficiente (eccetto a) è uguale a 0.

- con $b = 0$ → l'equazione diventa $ax^2 + c = 0$ e prende il nome di **pura**;
- con $c = 0$ → l'equazione diventa $ax^2 + bx = 0$ e prende il nome di **spuria**;
- con $b = 0$ e $c = 0$ → l'equazione diventa $ax^2 = 0$ e prende il nome di **monomia**.



2.2 Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta

Risolvere un'equazione di secondo grado significa trovare tutte le **soluzioni reali** (al massimo 2). Queste soluzioni sono dette **radici** dell'equazione.

Equazione pura: $ax^2 + c = 0$, da ricondurre alla forma $x^2 = k$

1° caso: $k > 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{k}$

2° caso: $k < 0 \rightarrow$ l'equazione risulta **impossibile** in R

Equazione spuria: $ax^2 + bx = 0$, da ricondurre alla forma $x(ax + b) = 0$

Due soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{b}{a}$

Equazione monomia: $ax^2 = 0$

Due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = 0$

2.3 Risoluzione di un'equazione di secondo grado completa

Un'equazione di secondo grado completa ha la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

Attraverso alcuni passaggi si riconduce alla forma: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

L'espressione al secondo membro si dice **discriminante** dell'equazione e viene indicata con Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$

1° caso: $\Delta > 0$

Se $\Delta > 0$ l'equazione ammette **due soluzioni reali distinte**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2° caso: $\Delta = 0$

Se $\Delta = 0$ l'equazione ammette **due soluzioni coincidenti**

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3° caso: $\Delta < 0$

Se $\Delta < 0$ l'equazione **non ammette soluzioni reali**.

2.4 Equazioni frazionarie

Per le equazioni frazionarie riconducibili a equazioni di secondo grado intere valgono le stesse considerazioni e procedure di calcolo presentate nello studio delle equazioni di primo grado.

2.5 Problemi con equazioni di secondo grado

I passaggi fondamentali per costruire il modello risolutivo sono:

- 1) **leggere attentamente il problema** per capire qual è il dato da trovare;
- 2) **applicare la metodologia** di risoluzione delle equazioni di secondo grado.



UD3 - LE EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO E LE EQUAZIONI ESPONENZIALI

3.1 Equazioni di grado superiore al secondo

Nelle equazioni di grado superiore al secondo l'incognita figura con esponente uguale a un numero (naturale) maggiore di 2.

3.2 Equazioni binomie

Le equazioni binomie sono equazioni del tipo

$$ax^n + b = 0$$

Per risolvere l'equazione, la si riconduce alla forma normale

$$x^n = k$$

Caso 1: n pari

– con $k > 0 \rightarrow x = \pm \sqrt[n]{k}$

– con $k < 0 \rightarrow$ l'equazione è impossibile in \mathbb{R}

Caso 2: n dispari

Unica soluzione: $x = \sqrt[n]{k}$

3.3 Equazioni di grado superiore al secondo risolvibili mediante scomposizione in fattori

Le equazioni di grado superiore al secondo si possono risolvere utilizzando i metodi di **scomposizione in fattori** come il raccoglimento totale, parziale o attraverso il riconoscimento di prodotti notevoli.

3.4 Equazioni biquadratiche

Un'equazione biquadratica è una particolare equazione di quarto grado che si presenta mediante la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$.

Le equazioni biquadratiche si risolvono mediante il **metodo di sostituzione di variabile**.

Si pone, ad esempio, $x^2 = t$, quindi:

$$at^2 + bt + c = 0$$

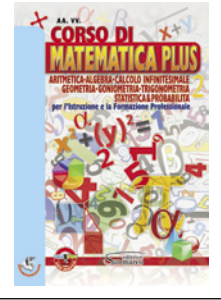
Si risolve l'equazione per t e solo successivamente per x .

3.5 Cenni di equazioni esponenziali

Un'equazione esponenziale è un'equazione in cui figurano una o più potenze con l'incognita all'esponente.

$$a^x = b$$

dove a, b, x rappresentano numeri reali qualsiasi, con $a > 0$.



In alcuni casi possono essere risolte ricorrendo alle **proprietà delle potenze**.

$$\begin{aligned}
 a^x \cdot a^y &= a^{x+y} && \rightarrow && 5^4 \cdot 5^7 &= 5^{4+7} &= 5^{11} \\
 a^x : a^y &= a^{x-y} && \rightarrow && 5^8 : 5^5 &= 5^{8-5} &= 5^3 \\
 (a^x)^y &= a^{x \cdot y} && \rightarrow && (5^3)^2 &= 5^{3 \cdot 2} &= 5^6 \\
 a^x \cdot b^x &= (a \cdot b)^x && \rightarrow && 5^2 \cdot 4^2 &= (5 \cdot 4)^2 &= 20^2 \\
 a^x : b^x &= (a : b)^x && \rightarrow && 16^4 : 8^4 &= (16 : 8)^4 &= 2^4 \\
 a^1 &= a && \rightarrow && 2^1 &= 2 \\
 a^0 &= 1 && \rightarrow && 5^0 &= 1
 \end{aligned}$$

UD4 - I SISTEMI DI EQUAZIONI

4.1 Equazioni di primo grado a più incognite

Un'equazione di primo grado a due incognite, del tipo

$$4x + 3y - 8 = 0$$

ammette **infinite soluzioni**, cioè esistono infinite coppie di numeri reali che, sostituite alle incognite x e y , trasformano l'equazione in una uguaglianza vera.

Si possono quindi attribuire all'incognita x **infiniti valori arbitrari** e determinare i corrispondenti valori di y (o viceversa).

4.2 Sistemi di equazioni

Un **sistema di equazioni** è un insieme di equazioni per le quali si cercano le soluzioni che soddisfino contemporaneamente tutte le equazioni presenti nel sistema stesso.

$$\begin{cases}
 3x - 2y + z = 0 \\
 2x + y - 2z = 5 \\
 5x + 4y - 6z = 15
 \end{cases} \rightarrow \text{sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite } x, y \text{ e } z$$

Un sistema può essere:

- **determinato**, se ha un numero finito di soluzioni;
- **indeterminato**, se ha infinite soluzioni;
- **impossibile**, se non ha alcuna soluzione.

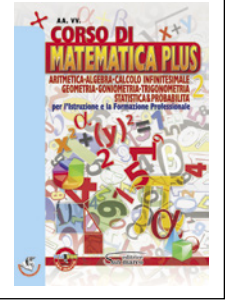
Il **grado** di un sistema è il prodotto dei gradi delle equazioni del sistema.

Un sistema di equazioni si dice **intero** se tutte le equazioni presenti nel sistema sono equazioni intere.

$$\begin{cases}
 5x - 2y = -1 \\
 4x - \frac{1}{3}y = 3
 \end{cases} \rightarrow \text{sistema intero di due equazioni nelle due incognite } x, y.$$

Un sistema di equazioni si dice **frazionario** se almeno una fra le equazioni presenti nel sistema è un'equazione frazionaria.

$$\begin{cases}
 \frac{x^2}{2(y-1)} = 18 \\
 2x - 4y = 4
 \end{cases} \rightarrow \text{sistema frazionario di due equazioni nelle due incognite } x, y.$$



4.3 I principi di equivalenza

Due sistemi si dicono **equivalenti** quando hanno le stesse incognite e le stesse soluzioni.

Principio di sostituzione: in un'equazione di un sistema, sostituendo un'incognita con la sua espressione ricavata dall'altra equazione, si ottiene un sistema equivalente a quello di partenza.

Principio di riduzione: se in un sistema si aggiungono o sottraggono membro a membro le due equazioni e poi si sostituisce l'equazione ottenuta al posto di una delle due equazioni del sistema, si ottiene un sistema equivalente al dato.

4.4 Risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite

Dato un sistema lineare di due equazioni in due incognite, si dice che una coppia di numeri reali è **soluzione del sistema**, se sostituendo tali valori alle due incognite, le due equazioni risultano contemporaneamente soddisfatte.

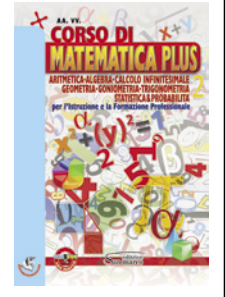
Esistono diversi metodi di risoluzione, da scegliere caso per caso per fare meno calcoli possibili.

Metodo di sostituzione

- 1) Ricondurre il sistema alla forma normale.
- 2) Ricavare da un'equazione l'espressione di una incognita in funzione dell'altra.
- 3) Sostituire nell'altra equazione l'espressione ricavata all'incognita, in modo da ottenere un'equazione in una sola incognita.
- 4) Risolvere l'equazione a una sola incognita.
- 5) Sostituire il valore così ricavato nella prima equazione, per determinare il valore dell'altra incognita.

Metodo di riduzione per addizione

- 1) Ricondurre il sistema alla forma normale.
- 2) Individuare il m.c.m. dei coefficienti dell'incognita, tralasciando eventuali segni negativi dei coefficienti.
- 3) Determinare i valori numerici per i quali moltiplicare una o entrambe le equazioni (talvolta è necessario "aggiustare" il segno), in modo da riuscire a ottenere i coefficienti dell'incognita da eliminare opposti.
- 4) Sommare membro a membro in colonna le due equazioni per poter eliminare l'incognita.
- 5) Risolvere l'equazione così ottenuta a una sola incognita.
- 6) Ripetere il procedimento per l'eliminazione dell'altra incognita oppure effettuare il metodo di sostituzione.



Metodo del confronto

- 1) Ricondurre il sistema alla forma normale.
- 2) Ricavare da entrambe le equazioni l'espressione di un'incognita in funzione dell'altra.
- 3) Confrontare (uguagliare) le due espressioni ottenute al secondo membro di ogni equazione ottenendo una nuova equazione in una sola incognita.
- 4) Risolvere l'equazione così ottenuta.
- 5) Ripetere il procedimento da capo per l'altra incognita oppure procedere con il metodo di sostituzione.

4.5 Risoluzione di un sistema con il metodo più opportuno

Un sistema lineare di due equazioni in due incognite può essere risolto utilizzando uno qualsiasi dei metodi analizzati.

- Convienne applicare il **metodo di sostituzione** quando almeno uno dei coefficienti della x e della y nelle due equazioni presenti è uguale a 1.
- Convienne applicare il **metodo di riduzione** quando i coefficienti delle due incognite nelle due equazioni sono tutti diversi da 1.
- Convienne applicare il **metodo del confronto** quando le due equazioni presentano già la stessa incognita espressa in funzione dell'altra.

UD5 - LE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

5.1 Le disuguaglianze numeriche

Una disuguaglianza numerica è formata da due espressioni numeriche separate da uno dei seguenti quattro simboli: " $>$ ", " \geq ", " $<$ ", " \leq ".

Proprietà delle disuguaglianze

- Aggiungendo o sottraendo ai due membri di una disuguaglianza numerica uno stesso numero, si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso.
- Moltiplicando o dividendo i due membri di una disuguaglianza numerica per uno stesso numero positivo, si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso.
- Moltiplicando o dividendo i due membri di una disuguaglianza numerica per uno stesso numero negativo, si ottiene una disuguaglianza di verso contrario.
- Dati due numeri concordi, la disuguaglianza che si ottiene considerando i loro reciproci ha verso contrario rispetto a quella fra i numeri dati.

5.2 Dalle disuguaglianze alle disequazioni

Le disuguaglianze in cui compare una variabile (per esempio la lettera x) si chiamano **disequazioni** in una incognita.

$$3x + 1 > 10$$



Tipo di disequazione	Intera	Frazionaria
numerica	$5x - \frac{5}{6} > 8x + 2$	$\frac{3x}{2x+4} \leq 6$
letterale	$ax > 5 - a$	$\frac{x-1}{x-a} > 3a$

5.3 Le disequazioni in una incognita

Le disequazioni in una incognita sono disuguaglianze fra due espressioni letterali verificate solo per particolari valori attribuiti alla lettera che in esse figura, detta **incognita**.

L'**insieme delle soluzioni** di una disequazione rappresenta l'insieme di tutti quei numeri reali che, sostituiti all'incognita, verificano la disequazione data.

L'insieme delle soluzioni può essere anche **rappresentato graficamente**.

Possibili intervalli di soluzioni	Rappresentazioni grafiche
$x > 5$	
$x \leq 3$	
$2 < x < 4$	
$1 \leq x < 6$	
$x < 2 \vee x > 3$	

5.4 Le disequazioni equivalenti e i principi di equivalenza

Due disequazioni sono **equivalenti** quando hanno lo stesso insieme di soluzioni.

$$x + 6 > 8 \text{ e } 2x > 4 \quad \rightarrow \quad \text{Soluzioni: } x > 2$$

5.5 Primo principio di equivalenza

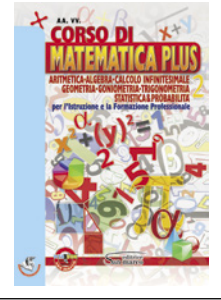
Addizionando o sottraendo ai due membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica, si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Per cui:

- in una qualsiasi disequazione un termine si può **spostare** da un membro all'altro purché venga cambiato di segno;
- in una disequazione si può **eliminare** un termine uguale che compare in entrambi i membri.

5.6 Secondo principio di equivalenza

Moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per uno stesso **numero positivo**, si ottiene una disequazione **equivalente** a quella data.



Moltiplicando o dividendo i due membri di una disequazione per uno stesso numero **negativo**, si ottiene una disequazione equivalente alla data, ma di **verso opposto**.

Per cui:

- moltiplicando entrambi i membri di una disequazione per -1 , si cambiano i segni di tutti i termini e si ottiene una disequazione equivalente alla data, ma di **verso opposto**.

5.7 Risolvere le disequazioni di primo grado numeriche intere

Risolvere una disequazione significa stabilire l'insieme S delle sue soluzioni che può essere un insieme di valori reali o un insieme vuoto. I passaggi sono i seguenti.

- 1) Eliminare eventuali parentesi effettuando i calcoli.
- 2) Se ci sono delle frazioni, che non contengono l'incognita al denominatore, calcolare il m.c.m. dei denominatori, quindi moltiplicare a sinistra e a destra per tale valore, eliminando i denominatori.
- 3) Spostare i termini noti a destra, lasciando al primo membro solo i termini contenenti l'incognita in modo da ricondurre la disequazione alla forma canonica $ax > b$ ($o <, \geq, \leq$).
- 4) Dividere i membri della disequazione per il coefficiente a .
 - Se $a > 0 \rightarrow x > \frac{b}{a}$
 - Se $a < 0 \rightarrow x > -\frac{b}{a}$
 - Se $a = 0$ e $b < 0 \rightarrow x =$ qualunque numero reale
 - Se $a = 0$ e $b \geq 0 \rightarrow$ la disequazione non è mai verificata (è impossibile)

5.8 Svolgimento di disequazioni numeriche intere di primo grado

Lo svolgimento di una disequazione di primo grado intera si sviluppa con le stesse modalità con cui si affronta un'equazione di primo grado.

5.9 Disequazioni frazionarie

Una disequazione frazionaria è una disequazione in cui l'incognita compare al denominatore di qualche frazione. Per la sua risoluzione, si devono seguire questi passaggi.

- 1) Ricondurre la disequazione in forma canonica (tutti i termini al primo termine, 0 al secondo).
- 2) Scrivere il primo membro come un'unica frazione (stesso denominatore), risolvendo gli eventuali calcoli richiesti a numeratore.
- 3) Studiare separatamente numeratore e denominatore, ponendo denominatore sempre > 0 .



- 4) Riportare in uno schema i segni del numeratore e del denominatore e determinare con la regola dei segni il segno della frazione (primo membro).

	- 5	5	
N	-	-	+
D	-	+	+
N/D	+	-	+

Se la disequazione di partenza richiede che la frazione sia positiva, si prenderanno sulla linea finale dello schema gli intervalli corrispondenti al segno "+", altrimenti al segno "-". Tali intervalli rappresenteranno l'insieme delle soluzioni cercate.

UD6 - LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

6.1 Disequazioni di secondo grado intere

Una disequazione di secondo grado intera a una incognita si può sempre ricondurre a una delle seguenti **forme canoniche**:

$$ax^2 + bx + c > 0 (\geq 0)$$

oppure

$$ax^2 + bx + c < 0 (\leq 0)$$

Risolvere una disequazione significa **determinare i valori di x** per i quali la disequazione risulta verificata, cioè determinare quei valori che la rendono una **disuguaglianza vera**.

6.2 Procedimento algebrico

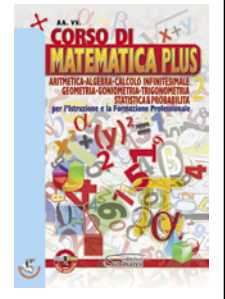
Ricondurre la disequazione alla forma canonica, ponendo il trinomio di secondo grado uguale a 0.

Per ricercare le soluzioni bisogna calcolare il **discriminante**:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Le diverse combinazioni sono riportate in tabella.

	$\Delta > 0$		$\Delta = 0$		$\Delta < 0$	
$a > 0$	segno >	$x < x_1 \vee x > x_2$	segno >	qualsiasi valore reale $\neq x_1$	segno >	qualsiasi valore reale
	segno \geq	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	segno \geq	qualsiasi valore reale	segno \geq	qualsiasi valore reale
	segno <	$x_1 < x < x_2$	segno <	nessun valore reale	segno <	nessun valore reale
	segno \leq	$x_1 \leq x \leq x_2$	segno \leq	$x = x_1$	segno \leq	nessun valore reale



6.3 Disequazioni frazionarie

Una disequazione frazionaria è una disequazione in cui l'incognita compare al denominatore di almeno una frazione.

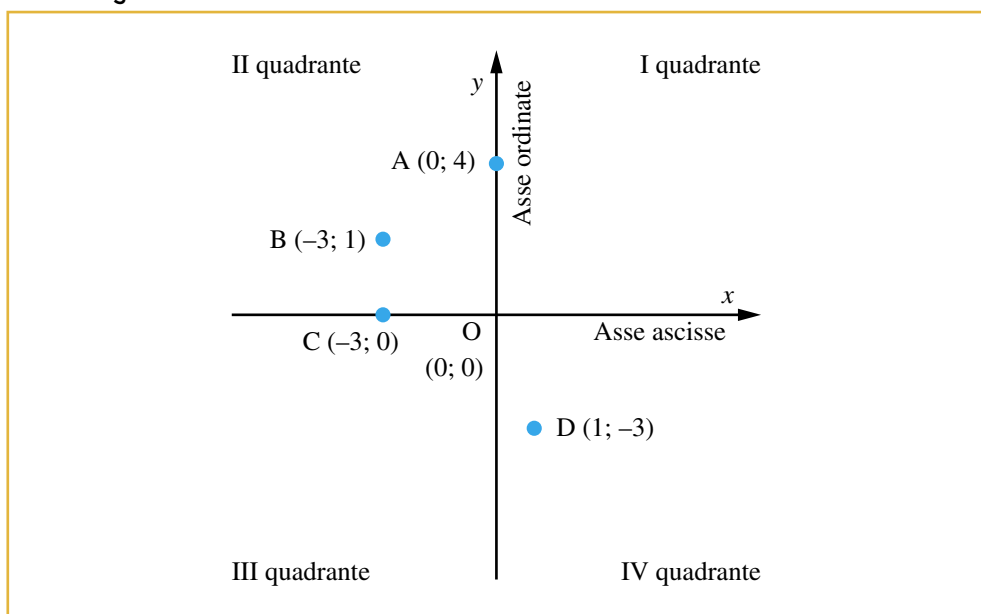
Per risolvere tali disequazioni, si procede all'analisi separata del segno del numeratore e del denominatore per giungere, con l'applicazione della **regola dei segni** e l'utilizzo del **grafico dei segni**, a ricavare il segno della frazione.

Il procedimento è analogo a quello visto nelle disequazioni frazionarie con numeratore e denominatore di primo grado.

UD8 - LA GEOMETRIA ANALITICA

8.1 Il piano cartesiano

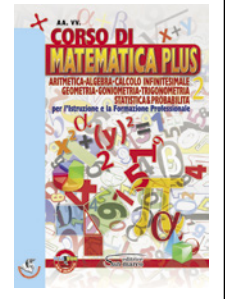
Il piano cartesiano è costituito da due rette orientate: la retta x orizzontale (asse delle ascisse) e la retta y verticale (asse delle ordinate). Il loro punto di incontro è definito **origine**.



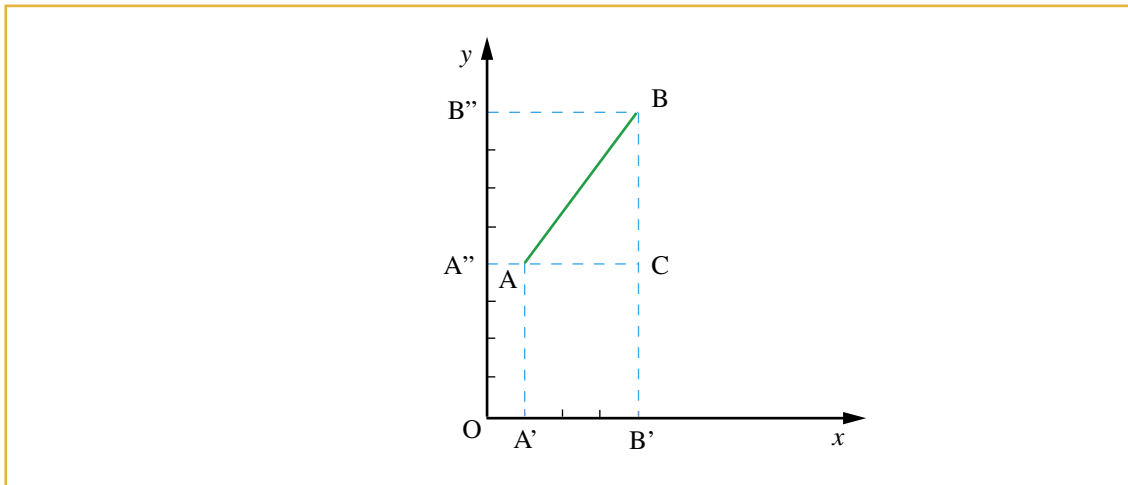
Ogni punto P del piano è individuato attraverso una coppia di numeri x e y che rappresentano le **coordinate cartesiane** del punto.

Date le coordinate di un punto è possibile disegnarlo sul piano cartesiano (e viceversa).

I due assi cartesiani individuano 4 angoli che prendono il nome di **quadranti**.



8.2 I segmenti nel piano cartesiano



Un segmento è dotato di due estremi. Per calcolare la sua **lunghezza**, è sufficiente calcolare la distanza tra le coordinate dei suoi estremi:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Per calcolare il suo **punto medio**:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

8.3 La retta nel piano cartesiano

Nel piano cartesiano, le rette sono descritte da **equazioni di primo grado** in due variabili.

Forma implicita: $ax + by + c = 0$

oppure isolando la y

Forma esplicita: $y = mx + q$

in cui:

- m è il coefficiente di x e corrisponde al **coefficiente angolare** della retta

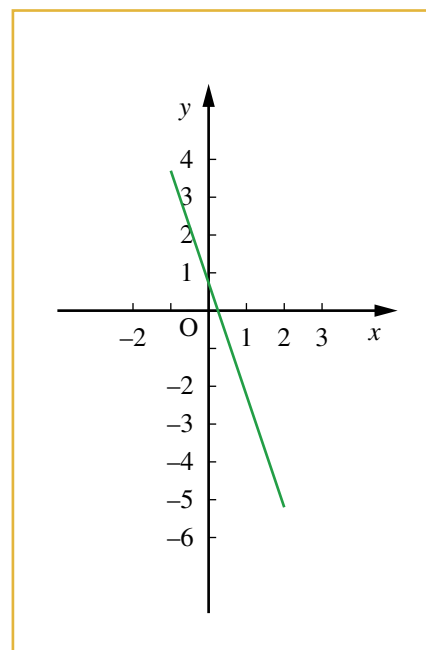
$$m = -\frac{a}{b}$$

- q è il termine noto dell'equazione e corrisponde all'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y (**ordinata all'origine**)

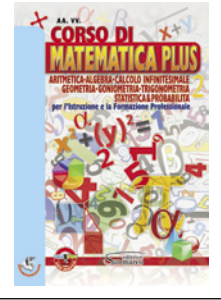
$$q = -\frac{c}{b}$$

Le soluzioni dell'equazione sono coppie $(x; y)$ di numeri reali che la soddisfano.

Esse rappresentano le coordinate dei punti appartenenti alla retta.



x	y
-1	$\frac{11}{3}$
0	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{9}$	0
2	$-\frac{16}{3}$



8.4 Dall'equazione di una retta al suo grafico

Data un'equazione di primo grado in due incognite, $ax + by + c = 0$, per determinare il grafico corrispondente si procede in questo modo:

- 1) risolvere l'equazione rispetto a y , ottenendo la forma $y = mx + q$;
- 2) creare una tabella dove si danno a x due valori arbitrari (0; 1; o altro) e si determinano i corrispondenti valori di y (sono sufficienti due valori);
- 3) indicare i punti nel piano cartesiano e tracciare la retta passante per essi.

8.5 Equazione della retta passante per due punti

La retta passante per i punti A ($x_A; y_A$) e B ($x_B; y_B$) di cui si conoscono le coordinate, ha equazione:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

In alternativa, sostituire le coordinate dei punti nell'equazione $y = mx + q$ e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_B = mx_B + q \\ y_A = mx_A + q \end{cases}$$

8.6 Equazione della retta noti un punto e il coefficiente angolare m

Per scrivere l'equazione della retta passante per un punto di cui si conoscono le coordinate A ($x_A; y_A$) e il coefficiente angolare m si usa la formula:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

8.7 Condizioni di parallelismo e perpendicolarità

Due rette sono **parallele** fra loro se formano lo stesso angolo con l'asse delle ascisse e hanno quindi lo stesso coefficiente angolare:

$$m_r = m_s$$

Se $m = 0$, la retta è parallela all'asse delle ascisse ($y = 0$).

Se l'angolo è retto, non c'è coefficiente angolare e la retta è parallela all'asse delle ordinate ($x = 0$).

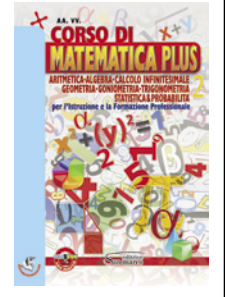
Due rette dotate di coefficiente angolare diverso da zero sono **perpendicolari** fra loro se i rispettivi coefficienti angolari sono opposti e inversi:

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

8.8 Le intersezioni fra rette

Se due rette non sono parallele si può determinare il loro **punto di intersezione**.

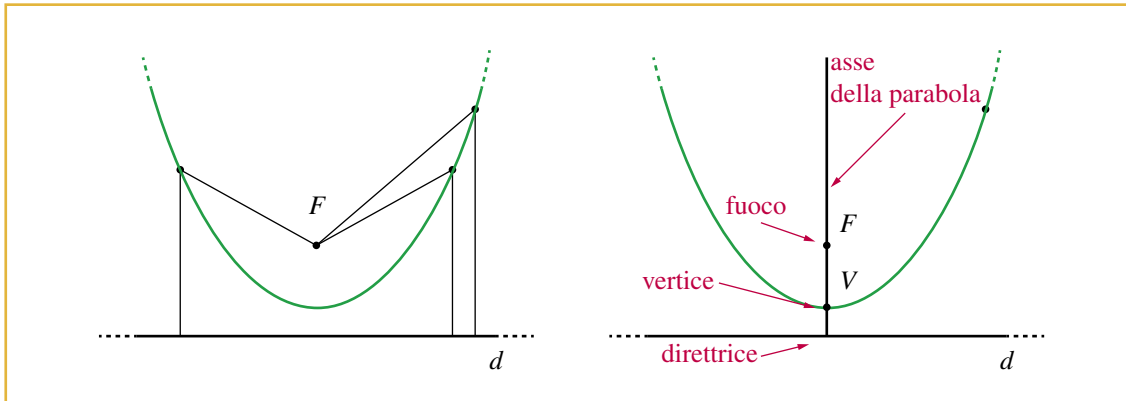
Per trovare le coordinate di questo punto bisogna risolvere il sistema formato dalle due equazioni che rappresentano le rette.



8.10 La parabola

Una parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso, denominato **fuoco** (F), e da una retta d fissa detta **direttrice**.

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice della parabola si chiama **asse della parabola**.



A ogni parabola con asse parallelo all'asse y corrisponde un'equazione:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{con } a \neq 0)$$

- se $a > 0$ → la parabola ha concavità verso l'alto (\cup);
- se $a < 0$ → la parabola ha concavità verso il basso (\cap).

Il **punto V** in cui la parabola interseca il suo asse si chiama **vertice della parabola**.

Le sue coordinate sono:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Il **termine noto** c indica l'ordinata del punto di intersezione fra la parabola e l'asse y : $P(0; c)$. Quando $c = 0$ la parabola passa quindi per l'origine O .

8.11 Dall'equazione di una parabola al suo grafico

Per realizzare il grafico della parabola, seguire questi passaggi.

- 1) Trovare le coordinate del vertice V .
- 2) Trovare le intersezioni con asse y : $P(0; c)$.
- 3) Trovare le intersezioni con asse x .

Con $y = 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ si ha quindi un'equazione di 2° grado
 se $\Delta > 0 \rightarrow$ la parabola incontra l'asse x in due punti
 se $\Delta = 0 \rightarrow$ la parabola incontra l'asse x in un solo punto
 se $\Delta < 0 \rightarrow$ la parabola non incontra l'asse x

8.12 Posizioni reciproche di retta e parabola

Una parabola e una retta possono intersecarsi in due punti (secanti), in un punto solo (tangenti) o in nessun punto. Per determinare le **intersezioni** è necessario risolvere il **sistema** formato dalle due equazioni

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$



- se $\Delta > 0$ → il sistema ha due soluzioni distinte, quindi la parabola incontra la retta in due punti
- se $\Delta = 0$ → il sistema ha una sola soluzione, quindi la parabola incontra la retta in un solo punto
- se $\Delta < 0$ → il sistema non ha soluzioni, quindi la parabola non incontra la retta

8.13 La circonferenza nel piano cartesiano

Una circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto **centro**.

A ogni circonferenza corrisponde un'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

- se $c = 0$ → la circonferenza passa sempre per l'origine degli assi cartesiani;
- se $a = 0$ → la circonferenza ha il centro sull'asse delle y ;
- se $b = 0$ → la circonferenza ha il centro sull'asse delle x ;
- se $a = 0$ e $b = 0$ → la circonferenza ha il centro nell'origine.

Per disegnare una circonferenza sul piano cartesiano si devono conoscere il centro (C) e il raggio (r).

Coordinate del centro: $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ Raggio circonferenza: $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Se sono noti il centro C e il raggio r , si può scrivere l'equazione della circonferenza come:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

8.14 Funzioni di proporzionalità e rappresentazioni grafiche

Nel piano cartesiano, la funzione lineare di **proporzionalità diretta** è rappresentata da una retta che passa per l'origine:

$$y = mx$$

La funzione di **proporzionalità quadratica** è rappresentata invece da una parabola con vertice nell'origine degli assi:

$$y = ax^2 \quad (\text{con } a \neq 0)$$



UD9 - INTRODUZIONE AL CALCOLO INFINITESIMALE

9.1 Le funzioni e le loro caratteristiche

La **funzione** è una legge che lega gli elementi di due insiemi secondo una espressione matematica indicata con

$$y = f(x)$$

dove x è la variabile indipendente e y è la variabile dipendente, in modo che a ogni elemento x del primo insieme A corrisponda un unico elemento y del secondo insieme B .

DOMINIO E CODOMINIO

L'insieme dei valori che si possono attribuire all'incognita x per i quali ha senso l'equazione $y = f(x)$ si definisce **dominio** e viene indicato con la lettera D .

Le regole da seguire per il calcolo del dominio di una funzione sono le stesse applicate per la determinazione del **campo di esistenza** delle equazioni.

Il **codominio** è invece l'insieme dei valori assunti dalla variabile y al variare dei valori della x in D e si indica con la lettera C .

CRESCENTE E DECRESCENTE

$$x_1 < x_2 \text{ e } f(x_1) < f(x_2)$$



Funzione strettamente
crescente (A)

$$x_1 < x_2 \text{ e } f(x_1) \leq f(x_2)$$



Funzione crescente (B)

$$x_1 < x_2 \text{ e } f(x_1) > f(x_2)$$



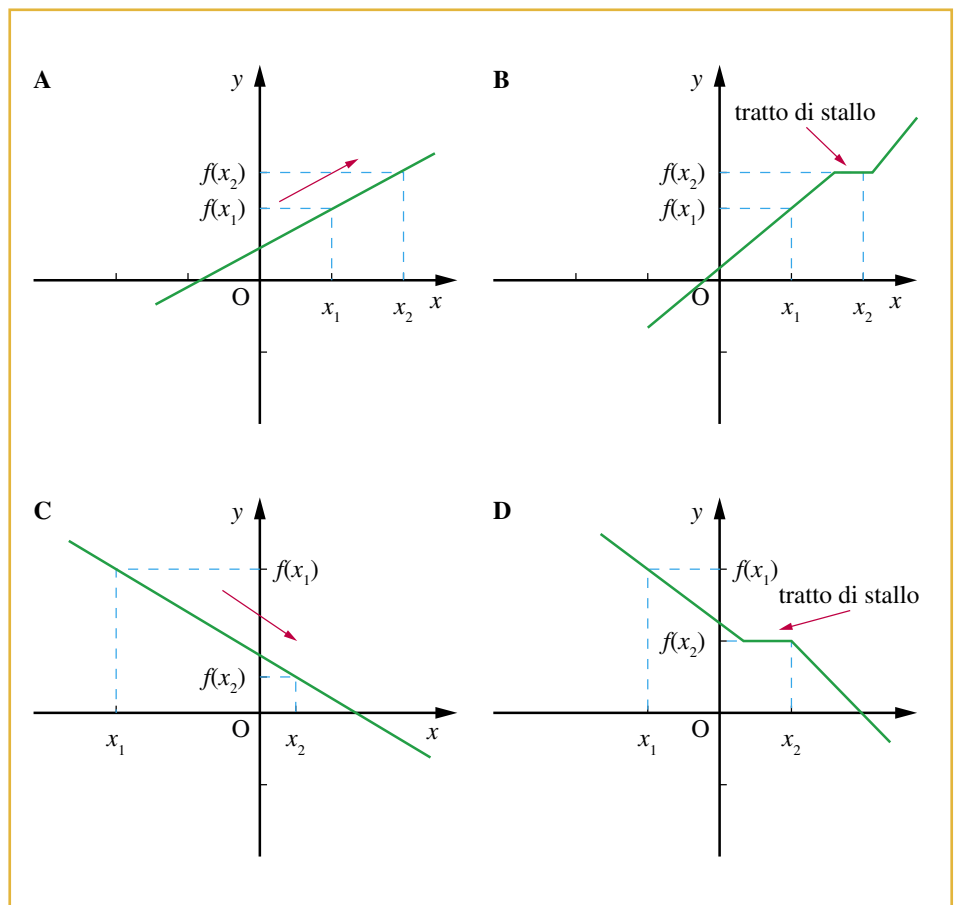
Funzione strettamente
decrecente (C)

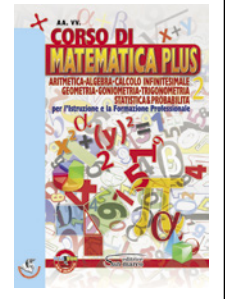
$$x_1 < x_2 \text{ e } f(x_1) \geq f(x_2)$$



Funzione decrescente (D)

Le funzioni nel loro dominio non sono sempre crescenti o sempre decrescenti, ma hanno degli **intervalli di crescita e decrescenza**.





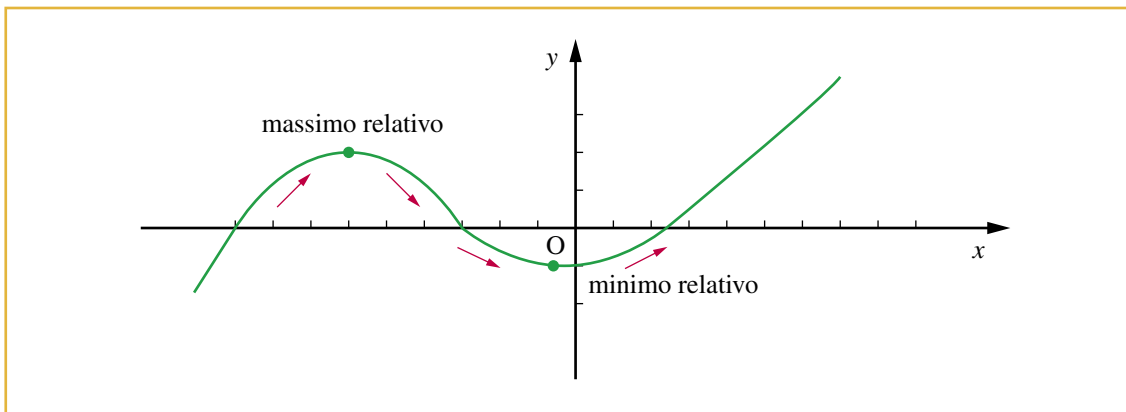
MASSIMI E MINIMI

Il **massimo relativo** corrisponde all'ordinata del punto in cui la funzione passa da essere crescente a decrescente. Il **minimo relativo** corrisponde invece all'ordinata del punto in cui la funzione passa da essere decrescente a crescente.

In una funzione possono esistere più massimi e più minimi relativi.

Il **massimo assoluto** rappresenta il valore più grande di tutti i valori assunti dalla funzione.

Il **minimo assoluto** rappresenta il valore più piccolo di tutti i valori assunti dalla funzione.

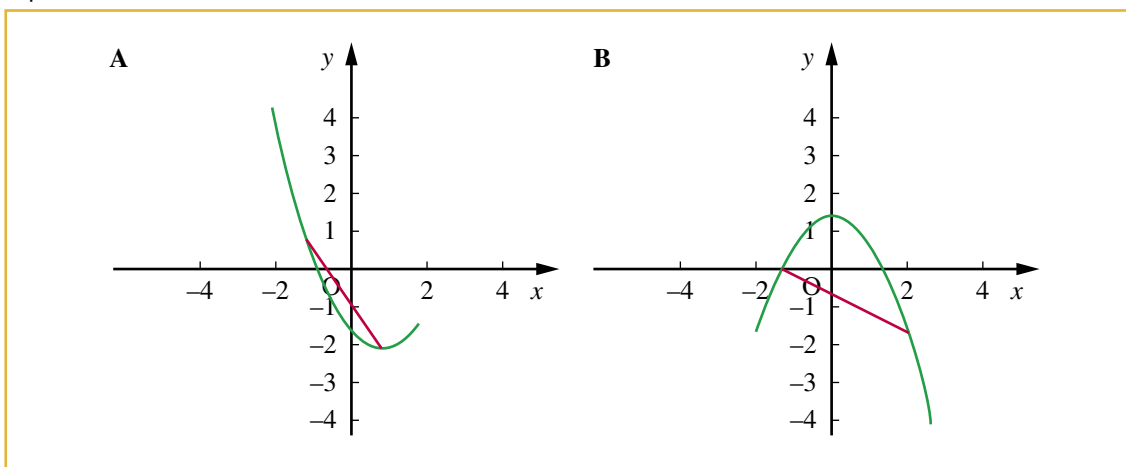


CONCAVITÀ

Una funzione si dice **convessa (A)** in un intervallo, se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico, nell'intervallo dato, si trova sopra il grafico stesso.

Una funzione si dice **concava (B)** in un intervallo, se il segmento che congiunge due qualsiasi punti del suo grafico, nell'intervallo dato, si trova al di sotto del grafico stesso.

I punti in cui la funzione cambia concavità sono definiti **flessi**.





9.2 Introduzione al calcolo dei limiti

Il calcolo dei limiti permette di capire l'andamento della funzione "nelle vicinanze" di un punto x_0 appartenente o non appartenente al dominio D .

Limite della funzione $f(x)$ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	Limite della funzione $g(x)$ $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$	Limite della somma $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x))$	Limite del prodotto $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x))$	Limite del quoziente $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$
l_1	l_2	$l_1 + l_2$	$l_1 \cdot l_2$	$\frac{l_1}{l_2}$
l_1	∞	$l_1 + \infty = \infty$	$l_1 \cdot \infty = \infty$	$\frac{l_1}{\infty} = 0$
∞	l_2	$0 + l_2 = l_2$	$\infty \cdot l_2 = \infty$	$\frac{\infty}{l_2} = \infty$
0	∞	$0 + \infty = \infty$	$0 \cdot \infty = \text{F.I.}$ forma indeterminata	$\frac{0}{\infty} = 0$
∞	0	$\infty + 0 = \infty$	$\infty \cdot 0 = \text{F.I.}$ forma indeterminata	$\frac{\infty}{0} = \infty$
0	0	$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$	$\frac{0}{0} = \text{F.I.}$ forma indeterminata
l_1	0	$l_1 + 0 = l_1$	$l_1 \cdot 0 = 0$	$\frac{l_1}{0} = \infty$
0	l_2	$0 + l_2 = l_2$	$0 \cdot l_2 = 0$	$\frac{0}{l_2} = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$+\infty \cdot +\infty = +\infty$	$\frac{+\infty}{+\infty} = \text{F.I.}$ forma indeterminata
$-\infty$	$-\infty$	$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	$\frac{-\infty}{-\infty} = \text{F.I.}$ forma indeterminata
$+\infty$	$-\infty$	$(+\infty) + (-\infty) = +\infty - \infty =$ F.I. forma indeterminata	$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$	$\frac{+\infty}{-\infty} = \text{F.I.}$ forma indeterminata
$-\infty$	$+\infty$	$(-\infty) + (+\infty) = -\infty + \infty =$ F.I. forma indeterminata	$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$	$\frac{-\infty}{+\infty} = \text{F.I.}$ forma indeterminata

Ci sono alcuni modi per togliere l'indeterminazione quando si presenta.

- $[0/0]$: bisogna procedere con la scomposizione in polinomi.
- $[\infty/\infty]$: al numeratore e al denominatore si considerano solo le x , con i loro coefficienti, col grado più alto.
 - Se il numeratore ha grado maggiore del denominatore = ∞
 - Se il numeratore ha grado minore del denominatore = 0



- Se numeratore e denominatore hanno lo stesso grado = rapporto tra i coefficienti di x di grado più elevato.
- $[+\infty -\infty]$: si considera solo la x col grado più alto.
- $[0 \cdot \infty]$: si riconduce alle forme $[0/0]$ e $[\infty/\infty]$.

CONTINUITÀ E DISCONTINUITÀ

Una funzione $y = f(x)$ si definisce **continua in un punto** c di un intervallo quando il limite di tale funzione nel punto c corrisponde al valore stesso che la funzione assume in quel punto, cioè $f(c)$.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Una funzione si dice **continua in un intervallo** se risulta continua in tutti i punti dell'intervallo.

La discontinuità è classificata in 3 tipologie.

Discontinuità di 1ª specie: si presenta quando il grafico ammette un salto di ampiezza finita nel punto c .

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l_1 \quad (\text{limite sinistro rispetto al punto } c)$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l_2 \quad (\text{limite destro rispetto al punto } c)$$

con $l_1 \neq l_2$

Discontinuità di 2ª specie: si presenta quando la funzione tende ad assumere valori infiniti alla destra o alla sinistra, o da entrambe le parti, di un punto c .

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty \text{ o non esiste}$$

oppure

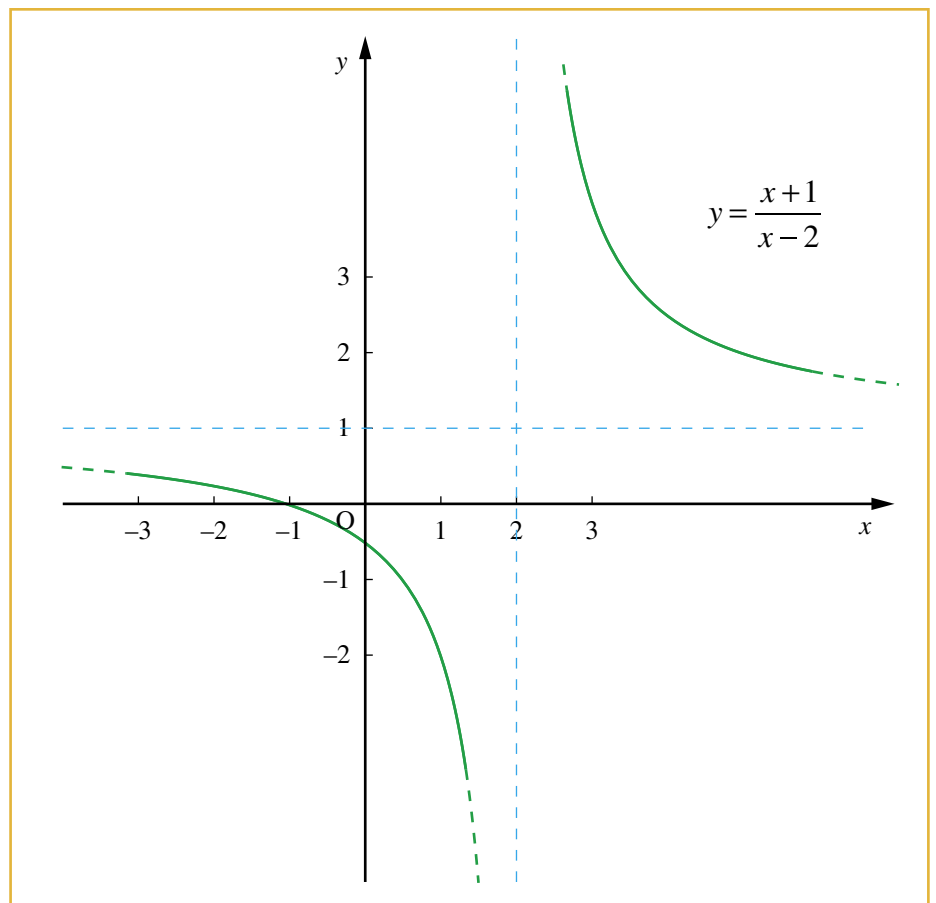
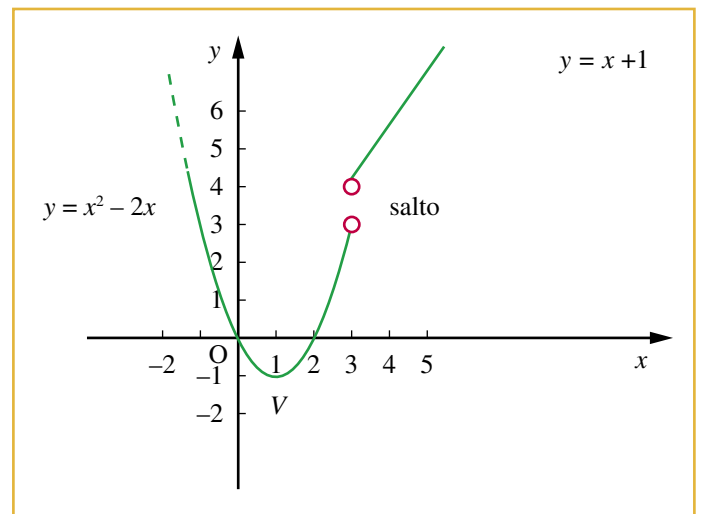
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty \text{ o non esiste}$$

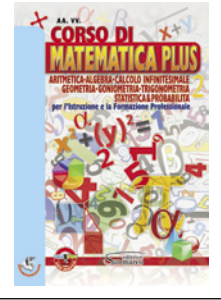
Discontinuità di 3ª specie: si presenta graficamente mediante la presenza di un puntino vuoto lungo il tracciato della funzione. È una discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$$

con $f(c) \neq l$ oppure non esiste $f(c)$





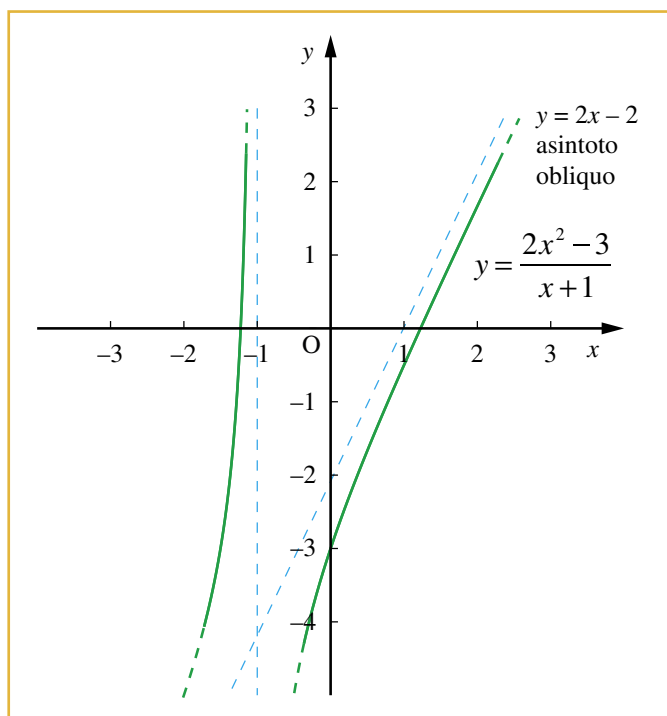
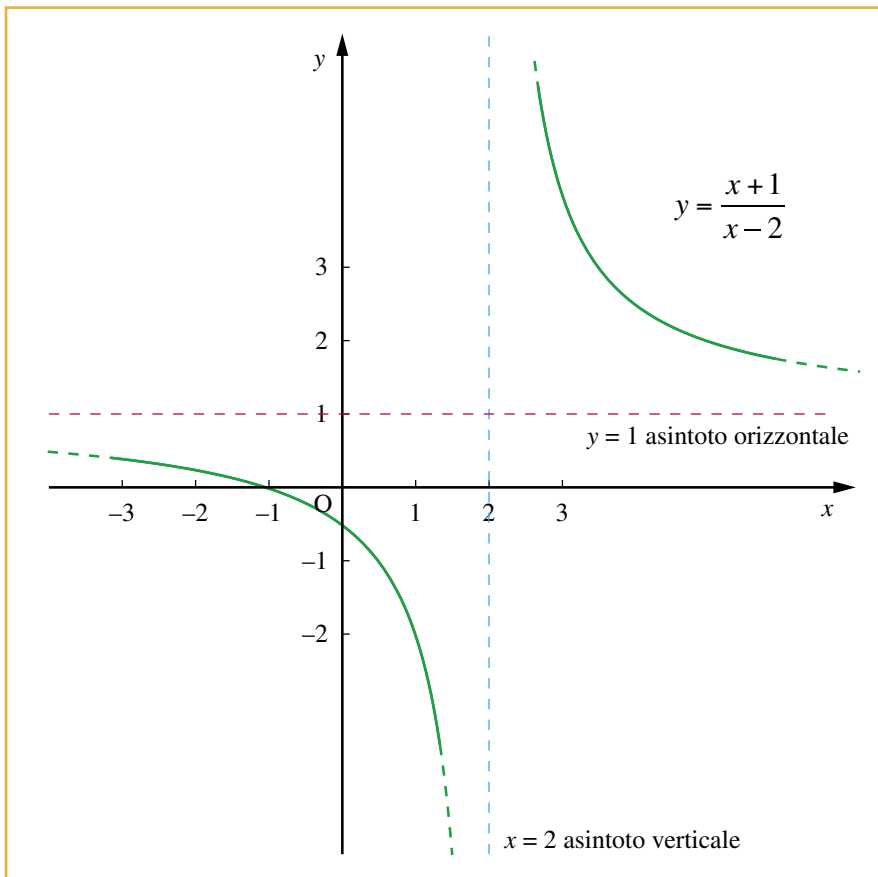
9.3 Asintoti

L'asintoto è la retta a cui il grafico di una funzione tende ad avvicinarsi sempre di più senza mai toccarla.

Asintoto verticale: $x = c$

Asintoto orizzontale: $y = \ell$

Asintoto obliquo: $y = mx + q$





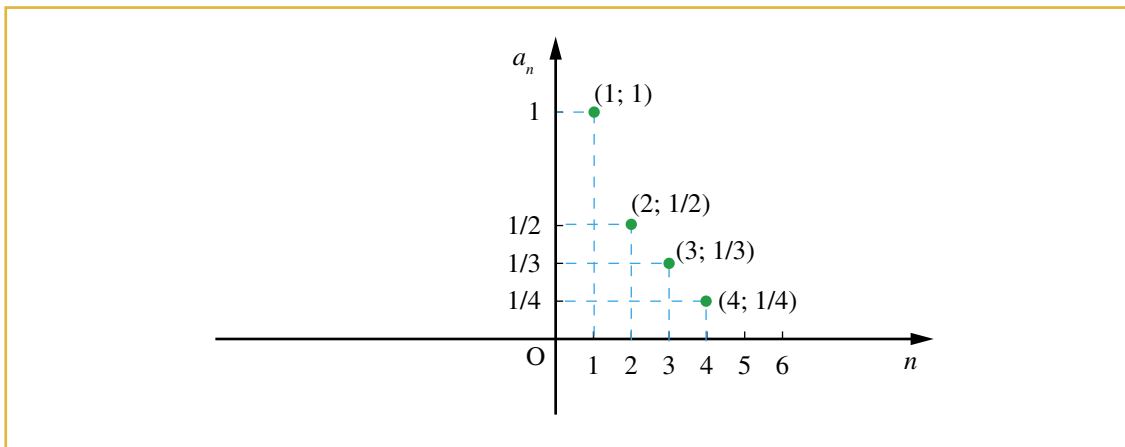
9.4 Le successioni

Una sequenza di numeri reali ottenuti mediante l'applicazione di una data relazione matematica viene detta **successione**.

Una successione è indicata mediante una funzione analitica a_n che esprime il termine generico della successione, dove n è un numero naturale.

Le successioni possono essere rappresentate su un piano cartesiano: l'asse delle ascisse diventa l'asse dei numeri naturali n , mentre l'asse delle ordinate diventa l'asse dei valori di a_n .

Il risultato è un **insieme di punti isolati**.



Una successione è **divergente** se, al crescere di n , i valori di a_n diventano sempre più grandi o sempre più piccoli ($\pm \infty$).

Una successione è **convergente** se, al crescere di n , i valori di a_n si avvicinano sempre più a 0.

Una successione è **indeterminata** se, al crescere di n , i valori di a_n i valori continuano ad oscillare.