I materiali ferromagnetici

Ogni materiale ferromagnetico risulta caratterizzato da un proprio ciclo di isteresi. In **fig.1**, per esempio, sono messi a confronto i cicli di isteresi magnetica del ferro dolce e dell'acciaio.

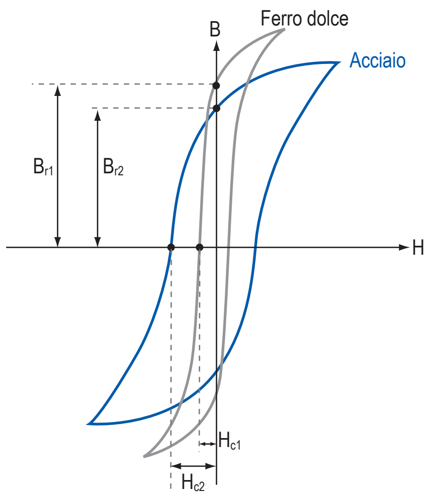

Fig. 1. *Cicli di isteresi del ferro dolce e dell'acciaio.*

Come si può notare, il ferro dolce si magnetizza bene anche con valori limitati di campo ed è caratterizzato da una induzione residua più elevata (B_{r1}), facilmente annullabile con un campo coercitivo di minore intensità (H_{c1}); il ferro dolce è quindi più adatto per circuiti magnetici temporanei, per esempio per la costruzione dei pacchi magnetici all'interno delle macchine elettriche; l'acciaio temprato, invece, si magnetizza di meno, ma presenta un magnetismo residuo (B_{r2}) smagnetizzabile con maggiore difficoltà (H_{c2}) ed è perciò utilizzato per la realizzazione dei magneti permanenti.

Il magnetismo residuo permette dunque la realizzazione di magneti permanenti a partire dal materiale non magnetizzato; sebbene questo sia già considerevole nei materiali ferromagnetici, l'aggiunta di altri elementi, quali il cobalto e il samario (detti **terre rare**), permette di ottenere polveri di leghe con le quali stampare magneti nelle forme desiderate.

Permeabilità magnetica non costante

Nei materiali paramagnetici l'induzione B è una funzione lineare del campo magnetico H, perciò per questi materiali la permeabilità magnetica è definibile come valore costante. Al contrario, i materiali ferromagnetici presentano una relazione non lineare tra campo e induzione e di conseguenza il valore della loro permeabilità non è costante al variare del campo H, inoltre, data la presenza dell'isteresi, la relazione B/H non è univocamente determinabile. Per questo motivo, nella pratica, almeno per i materiali dolci (ferro dolce, acciaio fucinato, ghisa, leghe ferro-silicio, ecc.), si ricorre a tabelle che forniscono la relazione B – H per alcuni valori significativi.

La **tab. 1** ne è un esempio.

Tab.1 - Valori tipici di magnetizzazione per alcuni materiali

Induzione magnetica	Materiale							
B	Ferro fucinato		Ghisa		Lamierino al silicio		Aria	
[T]	H [A/m]	μ_r	H [A/m]	μ_r	H [A/m]	μ_r	H [A/m]	μ_0
0,1	70	1.140	200	400	80	1.000	80.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
0,2	90	1.770	450	355	100	1.590	160.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
0,3	100	2.390	800	300	125	1.910	240.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
0,4	120	2.650	1.300	245	145	2.200	320.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
0,5	140	2.840	2.000	200	160	2.500	400.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
0,6	170	2.810	2.800	170	180	2.650	480.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
0,7	220	2.530	4.000	140	200	2.800	560.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
0,8	270	2.360	5.500	115	250	2.550	640.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
0,9	320	2.240	8.000	90	310	2.310	720.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
1	400	1.990	11.000	72	400	1.990	800.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
1,1	500	1.750	15.000	58	500	1.750	880.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
1,2	620	1.540	20.000	48	700	1.360	960.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
1,3	850	1.220			1.200	860	1.040.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
1,4	1.200	930			2.300	480	1.120.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$
1,5	2.000	600			4.000	300	1.200.000	$1{,}256 \cdot 10^{-6}$

Come si può notare, la permeabilità del ferro raggiunge il suo valore massimo (2.840) in corrispondenza di 0,5 T e per la ghisa (400) a 0,1 T. Difatti, dopo i primi valori, ad incrementi costanti di B corrispondono incrementi sempre maggiori del campo H. Ciò è dovuto al fenomeno della saturazione magnetica del materiale, laddove grandi variazioni del campo H producono solo piccole variazioni dell'induzione.

Legge di Hopkinson

Un solenoide, avvolto attorno ad un nucleo ferromagnetico e percorso da corrente, sostiene all'interno del nucleo stesso un campo magnetico molto intenso, che produce un flusso magnetico (Φ) di valore

$$\Phi = B \cdot S = \mu \cdot H \cdot S$$

dove S è la sezione del nucleo.
Sostituendo ad H l'espressione dell'intensità di campo all'interno del solenoide

$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$

si ottiene

$$\Phi = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{l} \cdot S$$

ricavando da questa l'espressione della forza magnetomotrice

$$N \cdot I = M = \frac{l}{\mu \cdot S} \cdot \Phi = R_m \cdot \Phi$$

è possibile definire la **riluttanza magnetica** del circuito

$$R_m = \frac{l}{\mu \cdot S}$$

misurata in ampere/weber $\left[\frac{A}{Wb}\right]$, o anche in henry^{-1} $\left[\frac{1}{H}\right]$.

In analogia alla forza elettromotrice (E) che sostiene il flusso di corrente (I) all'interno di un circuito elettrico resistivo (R) secondo la legge di Ohm

$$E = R \cdot I$$

la forza magnetomotrice (M) sostiene il flusso magnetico (Φ) all'interno di un circuito magnetico di riluttanza R_m, secondo la **legge di Hopkinson**

$$M = R_m \cdot \Phi$$

dal nome del fisico e ingegnere elettrico inglese John Hopkinson (1848-1898).

Circuiti magnetici

Un circuito magnetico è costituito da un nucleo chiuso di forma toroidale o rettangolare. Se lungo lo sviluppo del nucleo è presente un tratto in aria, o di materiale amagnetico, questo prende il nome di traferro. Se il circuito magnetico è costituito da un unico anello ferromagnetico di raggio medio r, come nell'esempio riportato in **fig. 2**, l'induzione magnetica è facilmente ricavabile, considerando il percorso medio delle linee di flusso, mediante la

$$B = \frac{\Phi}{S} = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{2\pi\, r}$$

poiché il circuito presenta la sola riluttanza

$$R_m = \frac{l}{\mu \cdot S} = \frac{2\pi\, r}{\mu \cdot S}$$

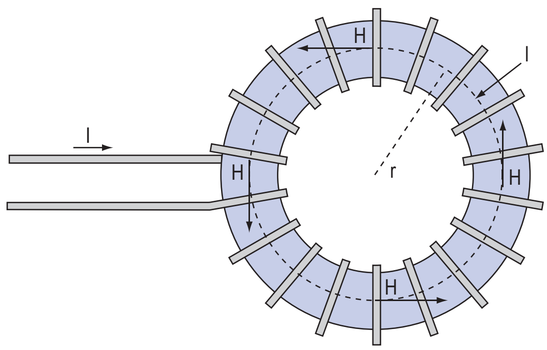

Fig. 2. *Bobina avvolta su un anello ferromagnetico.*

Se invece il circuito risulta più complesso (**fig. 3a**), con tronchi di materiale eterogeneo e/o con dimensioni differenti, in serie o in parallelo, tra loro e rispetto alla bobina di eccitazione, il calcolo della riluttanza complessiva va fatto (trascurando i flussi dispersi) elaborando le serie e i paralleli delle singole riluttanze, in modo analogo a quanto avviene per la soluzione dei circuiti resistivi.

Ogni tratto di riluttanza R può quindi essere rappresentato come una resistenza, come in **fig. 3b**. La tensione magnetica F di ogni tratto di riluttanza R è $F = \Phi \cdot R$. Inoltre, essendo $\Phi = B \cdot S$ e $R = l / (\mu \cdot S)$ si ottiene

$$F = B \cdot S \cdot l / (\mu \cdot S) = B \cdot l / \mu = H \cdot l$$

cioè la tensione magnetica di ciascun tratto di lunghezza l del circuito magnetico è anche il prodotto dell'intensità di campo H per la lunghezza l.

Nell'esempio di **fig. 3**, perciò, la forza magnetomotrice complessiva vale

$$\begin{aligned} M &= N \cdot I = H_1 \cdot L_1 + H_2 \cdot L_2 + \ldots H_5 \cdot L_5 \\ &= \Phi \cdot R_1 + \Phi \cdot R_2 + \ldots \Phi \cdot R_5 \\ &= \Phi \cdot (R_1 + R_2 + \ldots R_5) \end{aligned}$$

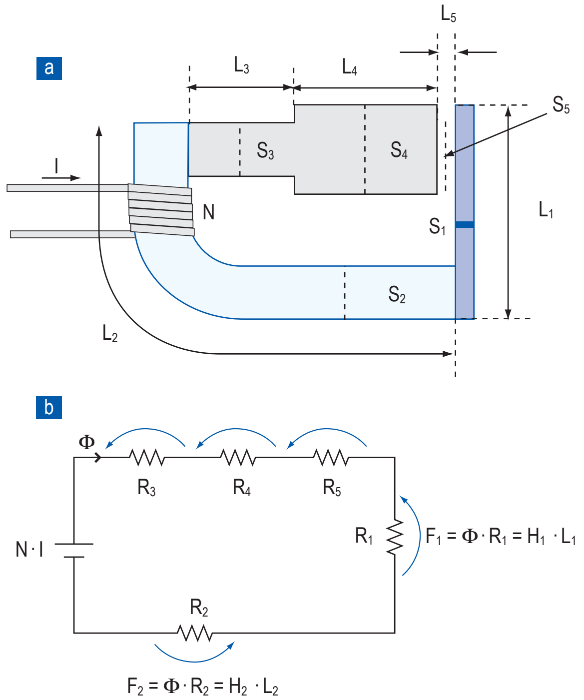

Fig. 3. *Circuito magnetico complesso, con traferro.*

ESERCIZIO A

Intorno ad un anello di ferro (**fig. 4**), con sezione circolare di diametro 2 cm e con diametro interno 8 cm, è avvolto un solenoide di 100 spire. Determinare il valore della corrente nell'avvolgimento che consente di ottenere nel ferro un'induzione di 0,5 T.

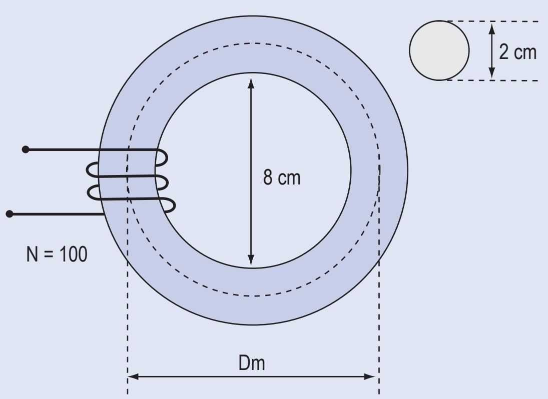

Fig. 4. *Toroide di ferro con avvolgimento.*

SOLUZIONE

Dalla **tab. 1**, in corrispondenza di B = 0,5 T, si ricava per il ferro un campo H = 140 A/m.
Il circuito magnetico si presenta circolare, con diametro medio D_m = 10 cm, perciò la sua lunghezza è

$$l = \pi \cdot D_m = \pi \cdot 0{,}1 \text{ m} = 0{,}314 \text{ m}$$

Da questi valori si può calcolare la forza magnetomotrice complessiva

$$M = N \cdot I = H \cdot l = 140 \,\frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0{,}314 \text{ m} = 44 \text{ A}$$

e la corrente necessaria

$$I = \frac{M}{N} = \frac{44 \text{ A}}{100} = 440 \text{ mA}$$

Un secondo modo per risolvere il circuito consiste nell'utilizzare la relazione di Hopkinson

$$M = R_m \cdot \Phi$$

Difatti, dalla sezione

$$S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1 \text{ cm})^2 = 3{,}14 \text{ cm}^2$$

$$\Phi = B \cdot S = 0{,}5 \text{ T} \cdot 3{,}14 \text{ cm}^2 = 1{,}57 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Dalla **tab. 1**, in corrispondenza di B = 0,5 T, per il ferro si ricava μ_r = 2.840 e quindi la riluttanza magnetica del circuito vale

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{l}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot S} = \\ &= \frac{0{,}314 \text{ m}}{1{,}256 \cdot 10^{-6} \,\frac{\text{H}}{\text{m}} \cdot 2.840 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \\ &= 284.000 \text{ H}^{-1} \end{aligned}$$

Utilizzando la legge di Hopkinson

$$\begin{aligned} M &= R_m \cdot \Phi \\ &= 284.000 \text{ H}^{-1} \cdot 1{,}57 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} = 44{,}6 \text{ A} \end{aligned}$$

$$I = \frac{M}{N} = \frac{44{,}6 \text{ A}}{100} = 446 \text{ mA}$$

a conferma del risultato precedente.

ESERCIZIO B

Intorno ad un anello di ghisa, con sezione 4 cm² e raggio medio 5 cm, è avvolto un solenoide di 50 spire, percorso da una corrente di 2 A. Determinare i valori dell'induzione magnetica e del flusso presenti nel metallo.

SOLUZIONE

Si calcola la forza magnetomotrice disponibile

$$M = N \cdot I = 50 \cdot 2\ A = 100\ A$$

La lunghezza del circuito magnetico è

$$l = \pi \cdot D_m = \pi \cdot 0,1\ m = 0,314\ m$$

Il campo interno vale

$$H = \frac{M}{l} = \frac{100\ A}{0,314\ m} = 318,5\ \frac{A}{m}$$

e dalla **tab. 1**, si può ricavare il valore corrispondente della induzione per la ghisa

$$B = 0,1\ T + 0,1\ T \cdot \frac{318,5 - 200}{450 - 200} = \\ = 0,1\ T + 0,047\ T = 0,147\ T$$

Il flusso magnetico vale perciò

$$\Phi = B \cdot S = 0,147\ T \cdot 4 \cdot 10^{-4}\ m^2 = \\ = 0,588 \cdot 10^{-4}\ Wb = 58,8\ \mu Wb$$

ESERCIZIO C

Attorno al circuito magnetico in **fig. 5**, ottenuto mediante fusione in ghisa, è avvolto un solenoide di 200 spire. Determinare il valore della corrente nel solenoide che consente di ottenere un flusso di 0,18 mWb nel metallo.

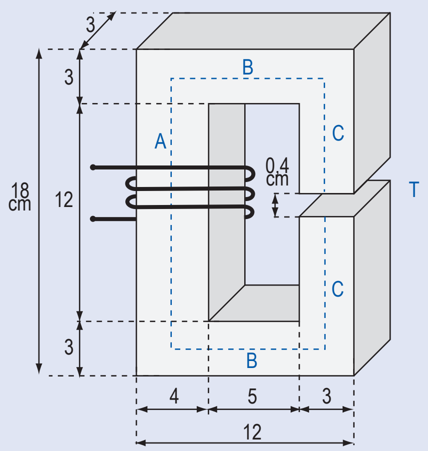

Fig. 5. *Circuito magnetico con avvolgimento.*

SOLUZIONE

Il nucleo magnetico si presenta disomogeneo nel materiale, per la presenza del traferro e asimmetrico nelle dimensioni delle sezioni. Bisogna procedere calcolando i singoli tronchi ottenuti scomponendo il percorso medio del flusso.

Tab. 2

Tronchi	Materiale	Lunghezza [cm]	Sezione [cm²]	Induzione B [T]	Campo H [A/m]	Forza magnetomotrice [A]
A	ghisa	15	12	0,15	325	48,75
B	ghisa	8,5	9	0,2	450	38,25
C	ghisa	7,3	9	0,2	450	32,85
T	aria	0,4	9	0,2	159.155	636,62

Per esempio, per il tronco A, nota la sezione

$$S_A = 4 \cdot 3 = 12\ cm^2$$

si determina l'induzione corrispondente

$$B_A = \frac{\Phi}{S_A} = \frac{0,18 \cdot 10^{-3}\ Wb}{12 \cdot 10^{-4}\ m^2} = 0,15\ T$$

Da questa, estrapolando i valori indicati in **tab. 2** per la ghisa, si ricava il campo necessario

$$H_A = 200 + \frac{1}{2} \cdot (450 - 200) = \\ = 200 + 125 = 325\ \frac{A}{m}$$

e la forza magnetomotrice corrispondente

$$M_A = H_A \cdot l_A = 325\ \frac{A}{m} \cdot 0,15\ m = 48,75\ A$$

Completata la tabella, si può calcolare la forza magnetomotrice complessiva

$$M = M_A + 2 \cdot M_B + 2 \cdot M_C + M_T = 827,57\ A$$

e la corrente necessaria

$$I = \frac{M}{N} = \frac{827,57\ A}{200} = 4,14\ A$$

ESERCIZIO D

L'elettromagnete di ferro riportato in **fig. 6** deve attrarre l'ancora sottostante, distante 6 cm; la forza necessaria complessivamente è di 10 kg. Sapendo che la bobina è di 1.000 spire e che la forza esercitata da ciascun polo è data dalla

$$F_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2 \cdot S}{\mu_0}$$

determinare il valore della corrente da utilizzare nella bobina.

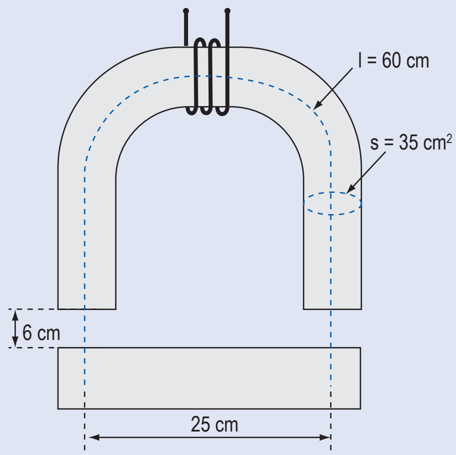

Fig. 6. *Elettromagnete a ferro di cavallo.*

SOLUZIONE

I poli sono due perciò la forza complessiva vale

$$F = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2 \cdot S_a}{\mu_0} = \frac{B^2 \cdot S_a}{\mu_0}$$

e da questa si può ricavare il valore necessario di induzione

$$B = \sqrt{\frac{F \cdot \mu_0}{S_a}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 9,81\ \text{N} \cdot 1,256 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{H}}{\text{m}}}{35 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}} = \\ = \sqrt{3,52 \cdot 10^{-2}} = 0,187\ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

Dalla **tab. 1** si estrapola il valore corrispondente del campo magnetico per il tratto in ferro

$$H = 70 + (90 - 70) \cdot \frac{0,187 - 0,1}{0,2 - 0,1} = \\ = 70 + 20 \cdot \frac{0,087}{0,1} = 70 + 17,4 = 87,4\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

e per il tratto in aria

$$H = 80.000 \cdot \frac{0,187}{0,1} = 148.810\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

La forza magnetomotrice totale vale

$$M = 87,4\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot (0,6 + 0,25)\ \text{m} \\ + 148.810\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = \\ = 74,3 + 17.857 = 17.931,5\ \text{A}$$

e la corrente necessaria è

$$I = \frac{M}{N} = \frac{17.931,5\ \text{A}}{1.000} = 17,93\ \text{A}$$

ESERCIZIO 1

Un solenoide di 100 spire è avvolto attorno ad un nucleo quadrato di dimensioni 10 x 10 cm e sezione 2 x 2 cm (**fig. 7**), ottenuto impaccando lamierini di ferro al silicio. Determinare la corrente da utilizzare nell'avvolgimento in modo da ottenere nel ferro un flusso di $4 \cdot 10^{-4}$ Wb.

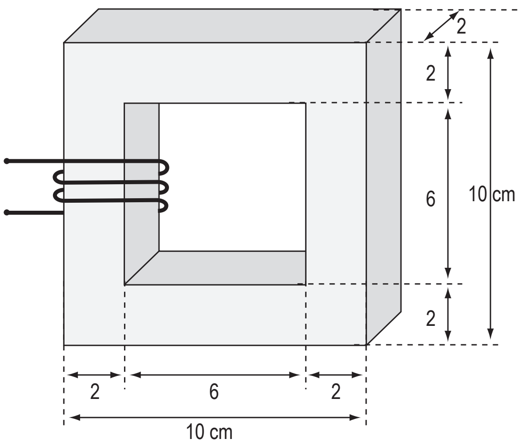

Fig. 7. *Nucleo di lamierini al silicio.*

[Ris.: I = 1,28 A]

ESERCIZIO 2

Intorno ad un anello di ghisa, con diametro medio 10 cm, è avvolto un solenoide di 100 spire. Determinare il valore della corrente da utilizzare nell'avvolgimento in modo da ottenere nel metallo un'induzione magnetica 0,5 T.

[Ris.: I = 6,28 A]

ESERCIZIO 3

Attorno al circuito magnetico in ferro fucinato, le cui dimensioni sono riportate in **fig. 5**, è avvolto un solenoide di 400 spire. Determinare il valore della corrente da utilizzare nell'avvolgimento per ottenere un flusso di 0,36 mWb nel metallo.

[Ris.: I = 3,33 A]

ESERCIZIO 4

Un elettromagnete costruito in lamierino di ferro al silicio, le cui dimensioni sono indicate in **fig. 6**, deve attrarre l'ancora sottostante, distante 6 cm, esprimendo una forza complessiva di 8 kg. Sapendo che la bobina è di 2.000 spire e che la forza esercitata da ciascun polo è data dalla

$$F_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2 \cdot S}{\mu_0}$$

determinare la corrente da imprimere nella bobina.

[Ris.: I = 8,07 A]