

I circuiti RLC

1 Circuiti RLC in serie al variare della frequenza

Nel circuito di **fig. 1a**, i componenti R, C, L sono in serie tra loro e sottoposti ad un generatore sinusoidale. Nel diagramma delle tensioni (**fig. 1b**), le cadute sulle due reattanze risultano sfasate in modo complementare rispetto alla corrente, così da risultare in controfase tra loro: la componente reattiva della tensione è perciò la differenza dei due vettori

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

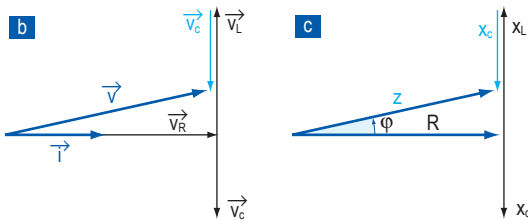
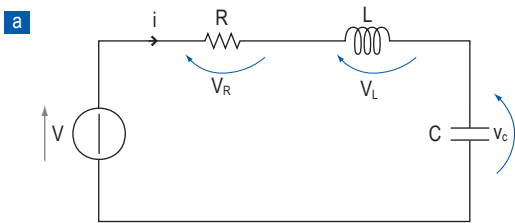


Fig. 1. Circuito RLC in serie in alternata.

Discorso analogo per il triangolo delle impedenze (**fig. 1c**)

$$X_L = 2\pi f L; \quad X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

1.1 Come variano l'impedenza Z e la corrente i al variare della frequenza?

A frequenze basse, X_L tende a zero, mentre X_C tende ad infinito, perciò l'impedenza serie Z tende all'infinito (**fig. 2**) e, di conseguenza, la corrente i tende a zero (**fig. 3**). Il circuito è prevalentemente capacitivo, poiché tutta la caduta di tensione è ai capi del condensatore, perché equivalente ad un interruttore aperto.

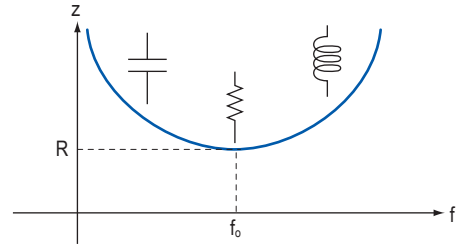


Fig. 2. Impedenza di un circuito RLC in serie al variare della frequenza.

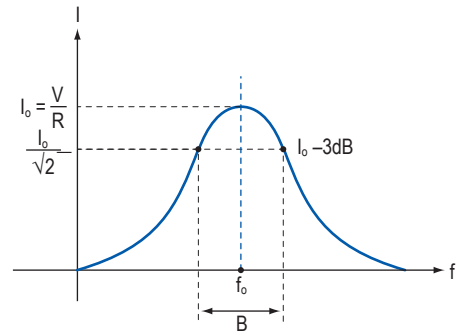


Fig. 3. Corrente in un circuito RLC in serie al variare della frequenza.

A frequenze alte, il discorso sembrerebbe rovesciarsi, con X_L che tende ad infinito, mentre X_C tende a zero, ma l'impedenza Z della serie non cambia e tende ancora ad infinito. La corrente, di conseguenza, tende a zero, e tutta la caduta di tensione è ai capi dell'induttanza.

Il valore di frequenza per cui le due reattanze sono di uguale peso ($X_L = X_C$), è detto frequenza di risonanza (f_0). A questa frequenza, il contributo della reattanza all'impedenza complessiva del circuito risulta nullo e Z è al suo valore minimo, $Z = R$.

Dall'equazione

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

si ricava

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$

Di conseguenza, il diagramma della corrente (**fig. 3**) presenta un massimo in corrispondenza di f_0 , di valore $I_0 = V/R$.

Attenzione! Alla frequenza di risonanza, il circuito si presenta all'esterno come se fosse costituito dalla sola resistenza; difatti, tutta la tensione applicata risulta cadere sulla resistenza R, determinando il valore della corrente I_o . Non appaiono all'esterno del circuito le due cadute sulle reattanze, che pure esistono

$$V_L = I_o \cdot 2\pi f_o L \quad \text{e} \quad V_C = I_o \cdot \frac{1}{2\pi f_o C}$$

di pari valore e complementari, che possono assumere valori superiori alla tensione di comando V. Queste tensioni possono rivelarsi pericolose per gli elementi L e C.

Per esempio, nel circuito di **fig. 1a**, supponendo $V = 10 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$, $C = 100 \text{ nF}$, la frequenza di risonanza risulta

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 10^{-9}}} = 1,59 \text{ kHz}$$

A questa frequenza

$$X_L = 2\pi f_o L = 2\pi \cdot 1,59 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} = 1.000 \Omega = X_C$$

le due reattanze si annullano reciprocamente e $Z = R = 10 \Omega$; di conseguenza

$$I_o = \frac{V}{Z} = \frac{10 \text{ V}}{10 \Omega} = 1 \text{ A}$$

e ciascuna caduta reattiva vale 1.000 V. La tensione di lavoro del condensatore è perciò questa e non i 10 V del generatore.

Si definisce **coefficiente di risonanza** la grandezza

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{\omega_o C R}$$

tanto più alto è Q, tanto maggiori sono le cadute reattive rispetto alla caduta resistiva. Per esempio, nell'esercizio di prima

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1.000 \Omega}{10 \Omega} = 100$$

Si definisce **banda passante** (B) l'intervallo di frequenze attorno ad f_o per le quali

$$I > \frac{I_o}{\sqrt{2}}$$

cioè per le quali la corrente non scende al di sotto di -3 dB rispetto al valore massimo; si può dimostrare che

$$B = \frac{f_o}{Q}$$

Sempre nell'esercizio di prima

$$B = \frac{f_o}{Q} = \frac{1.590 \text{ Hz}}{100} = 15,9 \text{ Hz}$$

Da queste relazioni si può intuire che, tanto più piccola è R, tanto più alto è Q e tanto più stretta è la curva della corrente i.

2 Applicazioni di circuiti RLC

Per rendere più concreto quanto appreso fino ad ora, si analizzano alcuni ambiti applicativi che utilizzano le proprietà dei circuiti RLC in frequenza.

2.1 Filtro selettivo passa banda

Si consideri il circuito in **fig. 4a**.

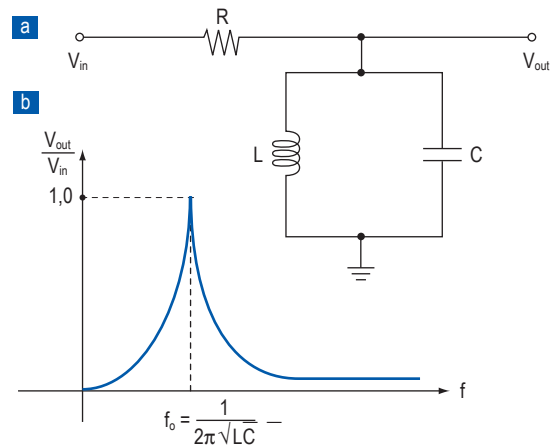


Fig. 4. Filtro selettivo passa banda.

Si tratta di un partitore di tensione, con il segnale di ingresso (V_{in}) applicato tra il primo morsetto di R e massa, e il segnale di uscita (V_{out}) prelevato ai capi del parallelo tra l'induttore e il condensatore. Calcolando l'impedenza del ramo parallelo

$$Z_p = \frac{jX_L \cdot (-jX_C)}{jX_L - jX_C}$$

si scopre che, poiché alla frequenza di risonanza

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

le due reattanze, X_L e X_C , hanno pari valore ohmico, a quella frequenza l'impedenza Z_p tende ad infinito, ovvero si comporta da circuito aperto, annullando qualsiasi partizione della tensione in ingresso. Alla frequenza di risonanza perciò

$$V_{out} = V_{in}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{V_{out}}{V_{in}} = 1$$

(**fig. 4b**).

Alle basse frequenze, invece, X_L tende a zero, così come X_C alle alte frequenze, trascinando con sé Z_p . La tensione in uscita si presenterà quindi inalterata per le frequenze in ingresso con valore prossimo alla risonanza, e con valore molto basso negli altri casi (fig. 4b). Il circuito di fig. 4a realizza, quindi, un filtro selettivo passa banda, poiché lascia passare solo un ristretto gruppo di frequenze, attorno alla frequenza di risonanza.

2.2 Filtro selettivo elimina banda

Si consideri il circuito in fig. 5a.

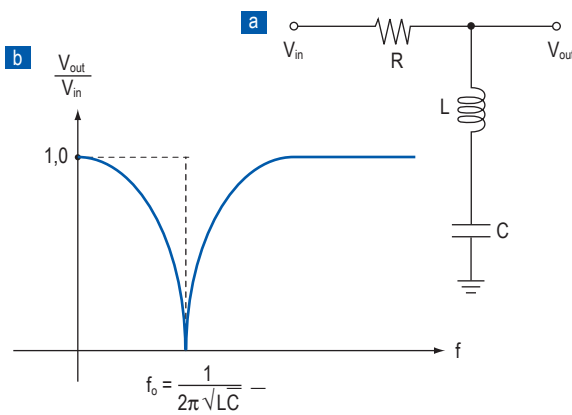


Fig. 5. Filtro selettivo elimina banda.

Questa volta, il circuito partitore (fig. 5a) presenta il bipolo di uscita con l'induttore e il condensatore in serie tra loro. La loro impedenza equivalente vale quindi

$$Z_s = jX_L - jX_C$$

Alla frequenza di risonanza

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

le due reattanze, X_L e X_C , hanno pari valore ohmico, e l'impedenza Z_s tende a zero, trascinando con sé la tensione di uscita. La tensione in uscita si presenterà tendente a zero per le frequenze in ingresso, con valore prossimo alla risonanza, e con valore inalterato negli altri casi (fig. 5b). Il circuito di fig. 5a realizza quindi un filtro selettivo elimina banda, poiché lascia passare tutte le frequenze, tranne un ristretto gruppo specifico.

2.3 Home automation modem, Philips TDA5051

L'idea di fondo è interessante e generale: si tratta di scambiare dati tra dispositivi alimentati tutti alla tensione di rete di 230 V, utilizzando per la trasmissione dei dati i fili stessi di alimentazione, evitando in tal modo di stendere altri cablaggi.

Nonostante il titolo, le applicazioni sono molto più numerose di quanto si possa immaginare: basti pensare all'uso dell'interfono in ufficio o al sistema di sorveglianza a distanza dei neonati, entrambi con trasmissione della voce sui fili del 230 V, senza cavi aggiunti; e ancora in campo industriale con le reti "link power" che scambiano dati utilizzando il medesimo doppino che porta l'alimentazione 48 V continua; in campo telefonico con l'ADSL che trasporta il canale internet sul medesimo doppino utilizzato per il tradizionale traffico telefonico, ecc.

Nelle note applicative Philips vengono proposte due soluzioni, con e senza isolamento galvanico dalla rete. Per semplificare l'analisi, si propone la seconda (fig. 6).

Analizzando i blocchi, si nota il microcontrollore che scambia dati con il TDA5051, dal quale riceve il clock (è il TDA difatti che possiede il quarzo 7,3728 MHz). Il TDA si interfaccia alla linea 230 V attraverso una rete di condensatori e induttanze. Dalla rete stessa è derivata l'alimentazione +5 V per l'intero sistema, mediante un integrato stabilizzatore (78L05).

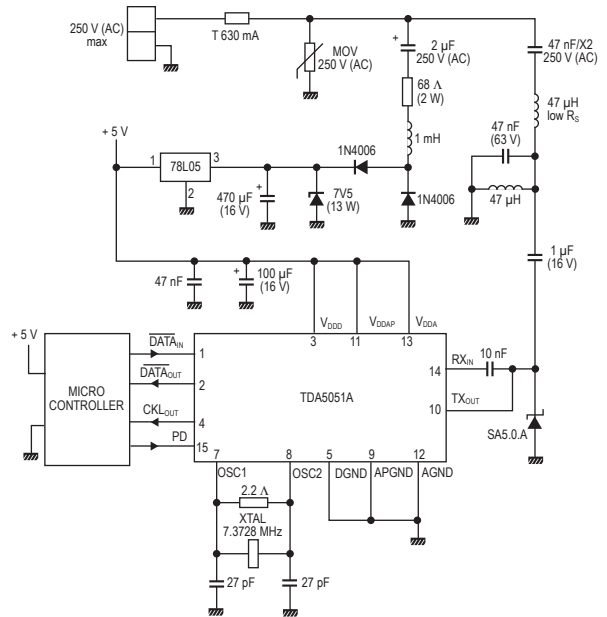


Fig. 6. Modem per home automation, senza isolamento dalla linea.

Si ponga ora attenzione alle frequenze in gioco. La rete 230 V lavora a 50 Hz, mentre il TDA emette i bit di dato generando brevi intervalli di segnale rettangolare a frequenza 115.200 Hz (ottenuta dividendo internamente la frequenza del quarzo per 64). La rete di interfaccia deve quindi rappresentare un blocco per il 50 Hz dalla rete verso il TDA e un accesso facilitato in entrata-uscita per le armoniche da 115.200 Hz in su, appartenenti al segnale dati.

In **tab. 1** sono riportati i valori delle reattanze presenti nel circuito alle frequenze di interesse.

Tab. 5.5 - Reattanze presenti nel sistema di fig. 6					
	47 nF	47 μH	1 μF	1 mH	2 μF
f = 50 Hz	67,7 kΩ	14,7 mΩ	3.182 Ω	0,314 Ω	1.591 Ω
f = 115.200 Hz	29,4 Ω	34,02 Ω	1,4 Ω	724 Ω	0,69 Ω

Semplificando, il 50 Hz vede il TDA dietro un partitore con 67,7 kΩ in serie e 14,7 mΩ verso massa; dei 230 V, solo pochi μV giungono al modem.

Per contro, il TDA lavora a partire dai 115.200 Hz, una frequenza prossima alla frequenza di risonanza dei componenti

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 107.083 \text{ Hz}$$

ed accede al cavo di rete attraversando componenti reattivi che si compensano tra loro, cioè con resistenza equivalente in serie praticamente nulla e resistenza equivalente in parallelo infinita.

Il sistema RLC di alimentazione limita la corrente disponibile da 50 Hz a circa 150 mA, mediante la reattanza del condensatore a quella frequenza, mentre rappresenta un carico di 700 Ω alla frequenza fondamentale del modem.



ESERCIZIO A

I componenti del circuito RLC in serie di **fig. 1a**, alimentato da un generatore sinusoidale che fornisce una tensione di 20 V a frequenza variabile, hanno i seguenti valori: R = 10 Ω, L = 220 mH, C = 47 nF. Determinare la massima corrente assorbita dal circuito e la massima tensione sui singoli componenti.

SOLUZIONE

Le grandezze richieste dal problema sono tutte riconducibili alla frequenza di risonanza

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{220 \cdot 10^{-3} \cdot 47 \cdot 10^{-9}}} = 1.565 \text{ Hz}$$

A questa frequenza, le reattanze hanno pari valore

$$X_L = 2\pi f_0 L = 2\pi \cdot 1.565 \cdot 220 \cdot 10^{-3} = 2.163 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_0 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1.565 \cdot 47 \cdot 10^{-9}} = 2.163 \Omega$$

e si compensano perfettamente, riducendo l'impedenza alla sola resistenza, perciò

$$I_{MAX} = I_0 = \frac{V}{R} = \frac{20 \text{ V}}{10 \Omega} = 2 \text{ A}$$

La resistenza è sottoposta all'intera tensione del generatore, mentre ciascuno dei componenti reattivi, con questa corrente, ha una caduta di tensione pari a

$$V_L = V_C = 2.163 \Omega \cdot 2 \text{ A} = 4.326 \text{ V}$$

ESERCIZIO 1

I componenti del circuito RLC in serie di **fig. 1a**, alimentato da un generatore sinusoidale che fornisce una tensione di ampiezza 40 V a frequenza variabile, hanno i seguenti valori: R = 20 Ω, L = 100 mH, C = 100 nF. Determinare la massima corrente assorbita dal circuito e la massima tensione sui singoli componenti.

[Ris.: alla $f_0 = 1.591,5 \text{ Hz}$, $X_L = 1 \text{ k}\Omega$, $I_{MAX} = 2 \text{ A}$, $V_X = 2.000 \text{ V}$]

ESERCIZIO 2

Il circuito RLC in serie di **fig. 7** deve possedere Z = 2 kΩ alla frequenza di 1 kHz; determinare C.

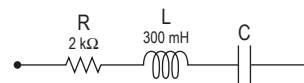


Fig. 7. Circuito RLC in serie.

[Ris.: C = 84 nF]

ESERCIZIO 3

In un circuito RLC in serie si rileva il periodo della oscillazione di risonanza T = 160 μs; sapendo che C = 10 nF, determinare L.

[Ris.: L = 64,8 mH]



ESERCIZIO B

I componenti del circuito di **fig. 4a** presentano i seguenti valori: R = 10 Ω, L = 10 mH, C = 100 nF. In ingresso al circuito è applicata una quadra 0 V, +10 V, con frequenza 5 kHz e duty cycle 50%. Determinare la tensione presente in uscita al circuito.

SOLUZIONE

Si tratta di un filtro selettivo passa banda, con frequenza centrale

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-9}}} = 5.033 \text{ Hz}$$

La quadra di ingresso è scomponibile in una componente continua, pari al valor medio del segnale e in una serie di armoniche dispari, la prima a 5 kHz, la successiva a 15 kHz, ecc. Di tutte queste componenti, il filtro lascia transitare solo la prima armonica (5 kHz), bloccando tutto il resto. In uscita al circuito si avrà perciò una sinusoide a 5 kHz, di ampiezza

$$V = \frac{2 \cdot A}{\pi} = \frac{2 \cdot 10 \text{ V}}{\pi} = \pm 6,37 \text{ V}$$



ESERCIZIO C

Il segnale di un interfono, collegato alla rete, presenta un fastidioso disturbo di fondo di frequenza 50 Hz. Indicare un circuito che elimini tale disturbo.

SOLUZIONE

Si può utilizzare il filtro selettivo elimina banda di **fig. 5**, dimensionando i componenti in modo che la frequenza di taglio coincida con il 50 Hz di rete.

Dalla

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

si ricava

$$LC = \frac{1}{(2\pi f_o)^2} = \frac{1}{(2\pi \cdot 50)^2} = 10 \cdot 10^{-6}$$

Il circuito può essere composto con $L = 100 \text{ mH}$ e $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$. Per il valore della resistenza, considerando $10 \text{ k}\Omega$ l'impedenza di ingresso dell'interfono, si può scegliere $R = 100 \text{ }\Omega$, con un'attenuazione di partitore dell'1%.

ESERCIZIO 4

I componenti del circuito di **fig. 4a** presentano i seguenti valori: $R = 10 \text{ }\Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 100 \text{ nF}$.

In ingresso al circuito è applicata una quadra 0 V , $+10 \text{ V}$, con frequenza 1 kHz e duty cycle 50%. Determinare la tensione presente in uscita al circuito.

[Ris.: esce solo la quinta armonica (5 kHz) di ampiezza $\pm 1,27 \text{ V}$]