La risoluzione delle reti mediante i principi di Kirchhoff

Il grande contributo dei principi di Kirchhoff all'analisi delle reti consiste nel fatto che questi permettono di comporre una serie di equazioni, che vincolano le grandezze elettriche della rete e che possono essere messe in sistema tra loro. Si tratta solo di sapere quante sono le equazioni indipendenti componibili con i suddetti principi.
Considerato che le variabili da determinare sono le correnti nei diversi rami, indicando con **n** il numero dei nodi presenti nella rete, con **r** il numero di rami della rete e con **m** il numero delle maglie indipendenti, è possibile comporre "**n – 1**" equazioni indipendenti ai nodi ed **m = r – n + 1** equazioni alle maglie. Le r equazioni complessive così ottenute, messe in sistema tra loro, consentono di determinare tutte le correnti presenti nella rete. Nella composizione delle equazioni alle maglie, si considera **indipendente** una **maglia** che possiede almeno un ramo non coperto da maglie individuate in precedenza.
In caso contrario, l'equazione relativa risulterebbe una combinazione lineare delle equazioni precedenti e non sarebbe utilizzabile.

Procedimento

Data una rete da analizzare, si procede quindi in questo ordine:

1. si fissano in modo arbitrario i **versi delle correnti** in ogni ramo della rete. Per comodità di segno, si cerca di assecondare il verso reale (in un generatore, per esempio, quello uscente dal morsetto positivo), anche se la cosa non è vincolante.
   Si può facilmente verificare al termine che, nel caso si fosse scelto il verso opposto, il risultato è negativo. Il segno meno di una corrente ha proprio questo significato: il verso reale della corrente è opposto a quello scelto in prima battuta sullo schema;
2. in base ai versi scelti per le correnti, si segnano tutte le **cadute di tensione**, nel rispetto delle convenzioni di segno (si ricordi che il punto a potenziale maggiore è quello dal quale entra la corrente);
3. si compongono le necessarie **equazioni** da porre in sistema.

Per quanto riguarda le equazioni alle maglie, per essere sicuri di comporre solo equazioni indipendenti, si può procedere considerando idealmente aperto uno dei rami di ciascuna maglia già considerata.

ESEMPIO 1

Risolvere la rete di **fig. 1**, in cui sono già segnati i versi scelti per le correnti e le cadute di tensione.

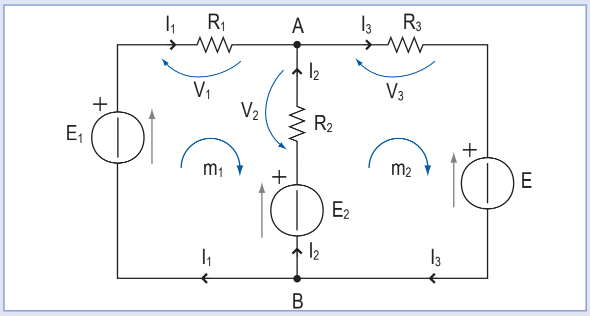

Fig. 1. *Rete elettrica.*

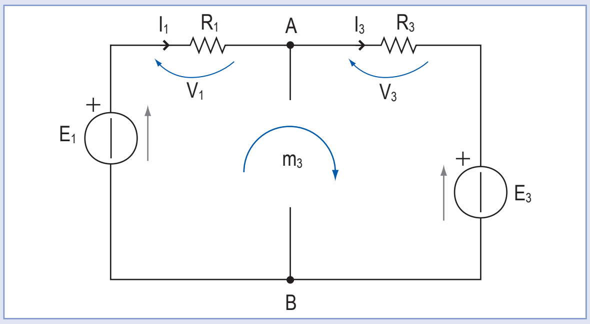

Fig. 2. *Terza maglia, m_3.*

SOLUZIONE

Questa rete presenta due nodi (A e B), tre rami e tre maglie, di cui due adiacenti (m_1 e m_2 nel disegno), e una più esterna (**fig. 2**), che racchiude le prime due.
Per quanto riguarda la legge ai nodi, poiché questi sono solo due, è possibile comporre due equazioni, ma una sola di queste è utilizzabile.
Applicando il primo principio al nodo A, si ottiene:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Applicando lo stesso principio al nodo B si ottiene:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

L'equazione risulta identica alla precedente e, perciò, è inutile per l'analisi della rete, perché non aggiunge alcuna informazione.
Le maglie invece sono tre, perciò sarebbe possibile comporre ben tre equazioni, ma, per le regole enunciate sopra, solo r – n + 1 di queste sono indipendenti, ovvero due.

Si tratta di sceglierle tra le seguenti:

1 per la maglia m_1:

$$E_1 - V_1 + V_2 - E_2 = 0$$

che diventa:

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 - E_2 = 0$$

2 per la maglia m_2:

$$E_2 - V_2 - V_3 - E_3 = 0$$

che diventa:

$$E_2 - R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - E_3 = 0$$

3 per la maglia m_3:

$$E_1 - V_1 - V_3 - E_3 = 0$$

che diventa:

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 - E_3 = 0$$

Una volta composta l'equazione alla maglia m_1, aprendo idealmente il ramo di sinistra, la sola maglia utilizzabile resta m_2. Ponendo a sistema tre equazioni indipendenti, la prima tra quelle ai nodi e le prime due tra quelle alle maglie, noti i valori dei generatori e delle resistenze è possibile determinare i valori delle correnti, I_1, I_2, I_3, circolanti nella rete. Supponendo che i componenti indicati in **fig. 1** abbiano i seguenti valori:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega,\ E_1 = 10\ V,\ E_2 = 12\ V,\ E_3 = 5\ V$$

e scegliendo le prime tra le equazioni trovate, queste diventano, rispettivamente:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 10 - 10 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 - 12 = 0 \\ 12 - 10 \cdot I_2 - 10 \cdot I_3 - 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ I_1 = \dfrac{10 \cdot I_2 - 2}{10} \\ I_3 = \dfrac{7 - 10 \cdot I_2}{10} \end{cases}$$

Si sostituiscono le espressioni di I_1 e I_3 nella prima:

$$\begin{cases} \dfrac{10 \cdot I_2 - 2}{10} + I_2 = \dfrac{7 - 10 \cdot I_2}{10} \\ \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} I_2 = 0{,}3\ A \\ \ldots \end{cases}$$

Nota I_2, si ricavano gli altri valori:

$$I_1 = 0{,}1\ A;\ I_3 = 0{,}4\ A$$

ESERCIZIO 1

Determinare i valori delle correnti presenti nella rete elettrica di **fig. 1**, supponendo che i componenti abbiano i seguenti valori:

$R_1 = R_2 = R_3 = 20\ \Omega$, $E_1 = 16\ V$, $E_2 = E_3 = 8\ V$

[Ris.: $I_1 = 0{,}266\ A$, $I_2 = -0{,}133\ A$, $I_3 = 0{,}133\ A$]

ESERCIZIO 2

Determinare i valori delle correnti presenti nella rete elettrica di **fig. 1**, supponendo che i componenti abbiano i seguenti valori:

$R_1 = R_2 = R_3 = 100\ \Omega$, $E_1 = 50\ V$, $E_2 = E_3 = 100\ V$

[Ris.: $I_1 = -0{,}333\ A$, $I_2 = -0{,}1665\ A$, $I_3 = 0{,}1665\ A$]

ESERCIZIO A

Dato il circuito riportato in **fig. 3**, determinare il valore della tensione V_{AB} utilizzando i principi di Kirchhoff.

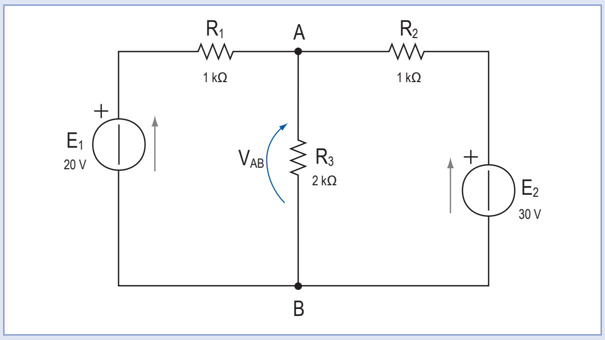

Fig. 3.

SOLUZIONE

La rete presenta tre maglie e due nodi. Si fissano in modo arbitrario i versi delle correnti in ogni ramo e, in base a questi, si segnano le cadute di tensione, nel rispetto delle convenzioni di segno (**fig. 4**).

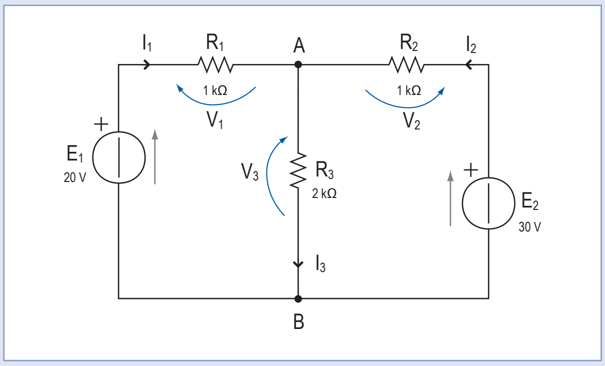

Fig. 4. *Metodo delle leggi di Kirchhoff.*

Si compongono le necessarie equazioni da porre in sistema: una ai nodi e due alle maglie:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ E_1 - V_1 - V_3 = 0 \\ V_3 + V_2 - E_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 20\ \text{V} - 1\ \text{k}\Omega \cdot I_1 - 2\ \text{k}\Omega \cdot I_3 = 0 \\ 2\ \text{k}\Omega \cdot I_3 + 1\ \text{k}\Omega \cdot I_2 - 30\ \text{V} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ I_1 = \dfrac{20\ \text{V} - 2\ \text{k}\Omega \cdot I_3}{1\ \text{k}\Omega} \\ I_2 = \dfrac{30\ \text{V} - 2\ \text{k}\Omega \cdot I_3}{1\ \text{k}\Omega} \end{cases}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{20\ \text{V} - 2\ \text{k}\Omega \cdot I_3}{1\ \text{k}\Omega} + \frac{30\ \text{V} - 2\ \text{k}\Omega \cdot I_3}{1\ \text{k}\Omega}$$

$$1\ \text{k}\Omega \cdot I_3 = 20\ \text{V} - 2\ \text{k}\Omega \cdot I_3 + 30\ \text{V} - 2\ \text{k}\Omega \cdot I_3$$

$$50\ \text{V} - 5\ \text{k}\Omega \cdot I_3 = 0$$

$$I_3 = 10\ \text{mA}$$

$$I_1 = \frac{20\ \text{V} - 2\ \text{k}\Omega \cdot 10\ \text{mA}}{1\ \text{k}\Omega} = 0$$

$$I_2 = \frac{30\ \text{V} - 2\ \text{k}\Omega \cdot 10\ \text{mA}}{1\ \text{k}\Omega} = 10\ \text{mA}$$

$$V_{AB} = V_3 = R_3 \cdot I_3 = 2\text{k}\Omega \cdot 10\ \text{mA} = 20\ \text{V}$$

ESERCIZIO 3

Scrivere tutte le possibili equazioni alle maglie per il circuito di **fig. 5**.

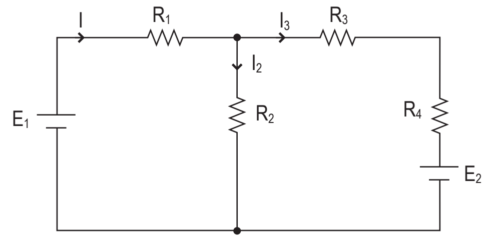

Fig. 5.

[Ris.: $E_1 - R_1 \cdot I - R_2 \cdot I_2 = 0$;
$E_1 - R_1 \cdot I - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_3 - E_2 = 0$;
$R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_3 - E_2 = 0$]

ESERCIZIO 4

Dato il circuito in **fig. 6**, ricavare i valori delle tensioni V_{AB} e V_{CB}, sia con il tasto T aperto sia con il tasto T chiuso.

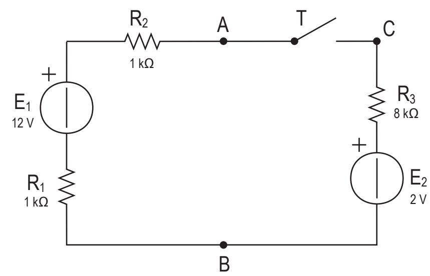

Fig. 6.

[Ris.: con T aperto: V_{AB} = 12 V, V_{CB} = 2 V;
con T chiuso: $V_{AB} = V_{CB}$ = 10 V]