Il principio di sovrapposizione degli effetti

In una medesima rete, accanto ai generatori in continua, si possono incontrare generatori di segnale di diversa fattura (sinusoidale, triangolare, quadra o anche completamente irregolari), ciascuno dei quali, all'interno della rete, fornisce un proprio contributo.
In ogni caso, se la rete è lineare, una semplificazione all'analisi può essere ottenuta valutando separatamente gli effetti dei singoli generatori, per sommarli poi al termine.
Il **principio di sovrapposizione degli effetti**, afferma che in una rete lineare, contenente più generatori, la corrente che circola in un ramo può essere calcolata sommando algebricamente i contributi dei singoli generatori, considerati attivi uno per volta (cioè spegnendo, nel frattempo, tutti gli altri).
Come detto, la condizione necessaria per la validità del principio, e quindi per una sua corretta applicabilità, è che la rete sia lineare, cioè composta da bipoli tutti con un legame lineare tra tensione e corrente, quali, appunto, sono i generatori e le resistenze.
Spegnere un generatore di tensione significa sostituirlo con un cortocircuito (qualunque corrente passi nel cortocircuito la tensione ai morsetti è nulla); **spegnere un generatore di corrente**, invece, significa toglierlo dal ramo dove è inserito, lasciandolo interrotto (in un circuito aperto la corrente circolante è nulla qualunque sia la tensione imposta agli estremi).

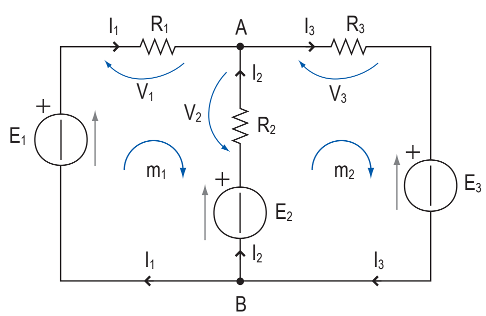

Fig. 1. *Rete elettrica.*

Per comprendere meglio quanto esposto sopra, si consideri la rete indicata in **fig. 1**, i cui componenti hanno i valori:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega,$$
$$E_1 = 10\ \text{V},\ E_2 = 12\ \text{V},\ E_3 = 5\ \text{V}$$

e si supponga di voler conoscere il valore della sola corrente I_3.
Si tratta di una rete lineare, sottoposta all'azione contemporanea di tre generatori: E_1, E_2, E_3.

La corrente I_3 può, quindi, essere calcolata sommando algebricamente i contributi parziali dei singoli generatori, applicati uno per volta.
Applicando il solo generatore E_1, si ottiene la rete indicata in **fig. 2**.

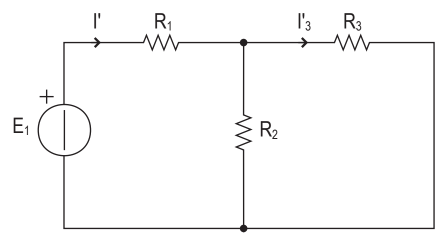

Fig. 2. *Contributo del solo generatore E_1.*

La corrente erogata dal generatore in questo contesto (I') si ricava una volta nota la resistenza totale vista ai suoi morsetti e, da questa, si può derivare il valore di I_3' mediante la regola dell'arco doppio tra R_2 ed R_3.

$$I' = \frac{E_1}{R_1 + (R_2 // R_3)} = \frac{10\ \text{V}}{10\ \Omega + (10\ \Omega // 10\ \Omega)} = \frac{10\ \text{V}}{15\ \Omega} = 0{,}66\ \text{A}$$

$$I_3' = I' \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0{,}66\ \text{A} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}33\ \text{A}$$

In modo analogo, applicando il solo generatore E_2, si ottiene la rete di **fig. 3** e si calcolano prima I'' e poi I_3''.

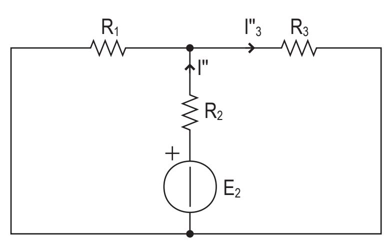

Fig. 3. *Contributo del solo generatore E_2.*

$$I'' = \frac{E_2}{R_2 + (R_1 // R_3)} = \frac{12\ \text{V}}{10\ \Omega + (10\ \Omega // 10\ \Omega)} = \frac{12\ \text{V}}{15\ \Omega} = 0{,}8\ \text{A}$$

$$I_3'' = I'' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 0{,}8\ \text{A} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}4\ \text{A}$$

Infine, con il solo generatore E_3, si ha la rete di **fig. 4** e si calcola $I_3''' = -I'''$.

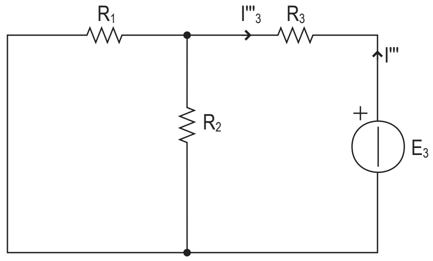

Fig. 4. *Contributo del solo generatore E₃.*

$$I''' = \frac{E_3}{R_3 + (R_1//R_2)} = \\ = \frac{5\ V}{10\ \Omega + (10\ \Omega//10\ \Omega)} = \frac{5\ V}{15\ \Omega} = 0{,}33\ A$$

La somma dei contributi fornisce il valore di I_3:

$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = \\ = 0{,}33\ A + 0{,}4\ A - 0{,}33\ A = 0{,}4\ A$$

Attenzione: se il generatore E_3, anziché costante, fosse stato un generatore variabile, per esempio con andamento triangolare, con valori compresi tra 2,5 e 5 V, avrebbe contribuito al valore della corrente I_3, con aggiunte comprese tra –0,166 e –0,33 A.
La stessa corrente I_3 sarebbe quindi risultata con andamento triangolare, con valori che spaziano tra un minimo di 0,4 A e un massimo di 0,566 A.

La rete appena considerata può essere risolta anche con altri metodi. Per esempio, si può fare un confronto con la W2 “La risoluzione delle reti mediante i principi di Kirchhoff”. Potrebbe quindi sorgere la domanda su quale sia il metodo più conveniente e più rapido da utilizzare per risolvere una determinata rete.
Ebbene, la risposta è che il metodo ottimale per la soluzione di una rete dipende dalla rete stessa e dalle richieste del problema: un circuito con molti generatori e poche maglie è più rapidamente risolvibile con i principi di Kirchhoff, mentre la presenza di molte maglie ci porta ad utilizzare il metodo di sovrapposizione degli effetti.
Per contro, la sovrapposizione degli effetti è più indicata laddove si desideri conoscere una sola delle grandezze del circuito. In definitiva, è solo mediante l’esperienza che il tecnico può affinare la capacità di scegliere il metodo più adatto per un determinato contesto.

ESERCIZIO A

Dato il circuito riportato in **fig. 5a**, determinare il valore della corrente I_1 utilizzando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Cosa succede alla corrente I_1 se il generatore I_A, per brevi istanti, dimezza il suo valore?

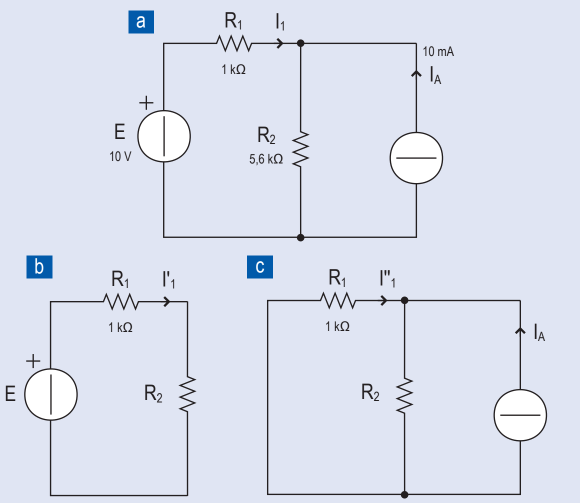

Fig. 5. *Esercizio con metodo della sovrapposizione degli effetti.*

SOLUZIONE

La rete riportata in **fig. 5a** presenta due generatori: uno di tensione e l'altro di corrente.

Considerando il circuito con il solo generatore di tensione E (**fig. 5b**), si calcola il primo contributo (I_1') alla corrente che attraversa la resistenza R_1:

$$I_1' = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10\ \text{V}}{1\ \text{k}\Omega + 5,6\ \text{k}\Omega} = 1,52\ \text{mA}$$

Considerando il solo generatore di corrente I_A (**fig. 5c**), si calcola il secondo contributo (I_1''), applicando la regola dell'arco doppio e tenendo conto che il verso della corrente richiesto è opposto rispetto a quello imposto dal generatore:

$$I_1'' = -I_A \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} =$$

$$= -10\ \text{mA} \cdot \frac{5,6\ \text{k}\Omega}{1\ \text{k}\Omega + 5,6\ \text{k}\Omega} = -8,48\ \text{mA}$$

La corrente I_1 richiesta sarà la somma dei due contributi:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 1,52\ \text{mA} - 8,48\ \text{mA} =$$

$$= -6,96\ \text{mA}$$

Negli intervalli di tempo in cui il generatore I_A dimezza il suo valore, anche il relativo contributo (I_1'') si dimezza e la corrente I_1 diventerà:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 1,52\ \text{mA} - 4,24\ \text{mA} =$$

$$= -2,72\ \text{mA}$$

ESERCIZIO B

Utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti, calcolare la corrente I, indicata nel circuito di **fig. 6a**.

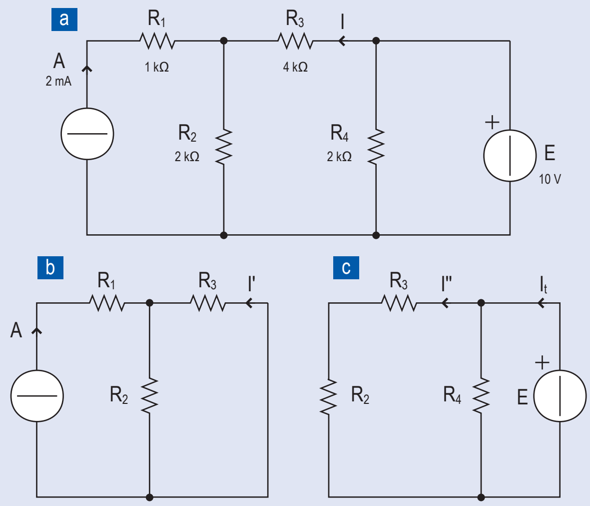

Fig. 6. *Esercizio con metodo della sovrapposizione degli effetti.*

SOLUZIONE

Per calcolare il contributo del solo generatore di corrente A, si spegne il generatore di tensione E e con ciò la resistenza R_4 risulta cortocircuitata. Nel circuito che si ottiene (**fig. 6b**), la resistenza R_3 risulta in parallelo ad R_2, perciò il contributo (I') del generatore A, alla corrente richiesta, si può calcolare con la regola dell'arco doppio:

$$I' = -A \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} =$$

$$= -2\ \text{mA} \cdot \frac{2\ \text{k}\Omega}{2\ \text{k}\Omega + 4\ \text{k}\Omega} = -0,66\ \text{mA}$$

Per ottenere il contributo del solo generatore di tensione E, si elimina il generatore di corrente A (**fig. 6c**). La resistenza R_1 risulta staccata dal resto del circuito e, perciò, è ininfluente.

La corrente I_t erogata dal generatore vale:

$$I_t = \frac{E}{(R_2 + R_3)//R_4} =$$

$$= \frac{10\ \text{V}}{(2\ \text{k}\Omega + 4\ \text{k}\Omega)//2\ \text{k}\Omega} = \frac{10\ \text{V}}{1,5\ \text{k}\Omega} = 6,66\ \text{mA}$$

Il contributo (I'') alla corrente richiesta si ottiene applicando la regola dell'arco doppio:

$$I'' = I_t \cdot \frac{R_4}{(R_2 + R_3) + R_4} =$$

$$= 6,66\ \text{mA} \cdot \frac{2\ \text{k}\Omega}{(2\ \text{k}\Omega + 4\ \text{k}\Omega) + 2\ \text{k}\Omega} = 1,66\ \text{mA}$$

La corrente I richiesta è data dalla somma dei due contributi:

$$I = I' + I'' = -0,66\ \text{mA} + 1,66\ \text{mA} = 1\ \text{mA}$$

ESERCIZIO 1

Utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti, calcolare la tensione V_{AB} segnata nello schema di **fig. 7**.

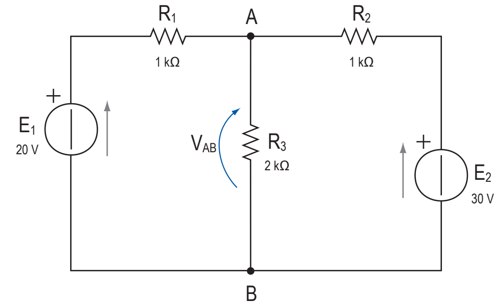

Fig. 7.

[Ris.: $V_{AB}' = 8$ V ; $V_{AB}'' = 12$ V; $V_{AB} = 20$ V]

ESERCIZIO 2

Utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti, calcolare la tensione V_{AB} segnata nello schema di **fig. 8**.

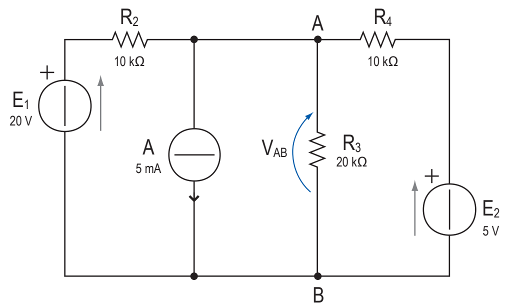

Fig. 8.

[Ris.: $V_{AB}' = 8$ V ; $V_{AB}'' = -20$ V; $V_{AB}''' = 2$ V; $V_{AB} = -10$ V]

ESERCIZIO 3

Utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti, calcolare la corrente I_2 segnata nello schema di **fig. 9**.

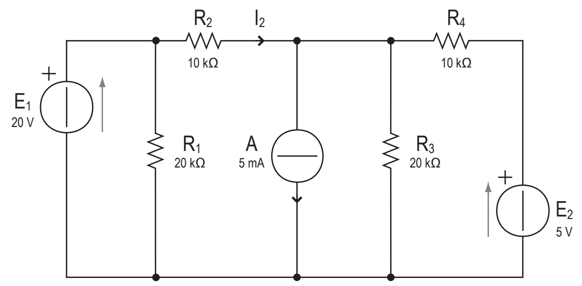

Fig. 9.

[Ris.: $I_2' = -0{,}2$ mA ; $I_2'' = 2$ mA; $I_2''' = 1{,}2$ mA; $I_2 = 3$ mA]

ESERCIZIO 4

Utilizzando il principio della sovrapposizione degli effetti, determinare il generatore equivalente della rete di **fig. 10**, visto dai morsetti A e B.

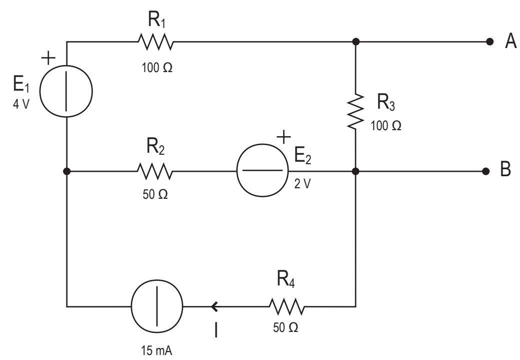

Fig. 10.

[Ris.: $E_{eq} = 0{,}3$ V (I) + 1,6 V (E_1) – 0,8 V (E_2) = 1,1 V; $I_{cc} = 5$ mA (I) – 13,3 mA (E_1) + 26,6 mA (E_2) = 18,3 mA; $R_{eq} = (R_1 + R_2) // R_3 = 60\ \Omega$]