Analisi dei circuiti RLC in transitorio

L'analisi in transitorio implica l'esame delle grandezze tensione e corrente in funzione del tempo, a seguito di variazioni nelle condizioni di lavoro, tenendo conto che l'energia negli induttori è:

$$E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

e nei condensatori è:

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

e non può mai cambiare istantaneamente. Così come non sono possibili variazioni istantanee di tensione su un condensatore, allo stesso modo non sono possibili variazioni istantanee di corrente in un induttore.

Componenti singoli in transitorio

In **fig. 1** sono riassunte le relazioni istantanee tra la tensione e la corrente negli elementi reattivi C ed L.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t) \qquad v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$v = \frac{1}{C} \int i \cdot dt \qquad i = \frac{1}{L} \int v \cdot dt$$

Fig. 1. *Componenti singoli in transitorio.*

Come già si è visto, caricando con una corrente i, per un tempo dt, un condensatore C, la carica $dq = i \cdot dt$ accumulata incrementa la tensione di una quantità:

$$dv = \frac{dq}{C} = \frac{i \cdot dt}{C}$$

ne segue che, per il condensatore, il valore istantaneo della corrente determina la velocità di variazione della tensione ai capi:

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

e, da questa:

$$v = \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

Viceversa, per l'induttore, il valore istantaneo della tensione determina la velocità di variazione della corrente:

$$v = L \cdot \frac{di}{dt}$$

e, da questa:

$$i = \frac{1}{L} \cdot \int v \cdot dt$$

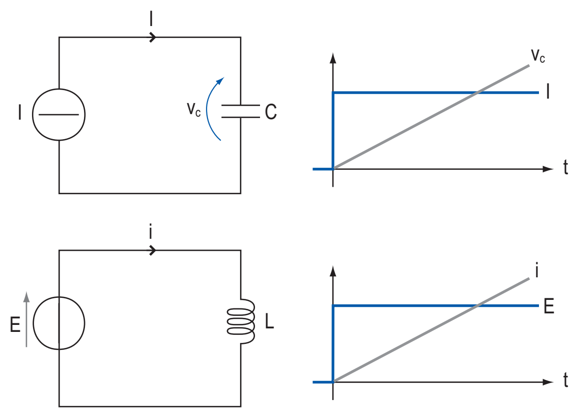

Fig. 2. *Carica con generatori costanti.*

Se i generatori di comando applicati hanno valore costante nel tempo (**fig. 2**), anche le velocità di variazione dei segnali comandati sono costanti.
Il loro andamento è lineare nel tempo (la retta ha pendenza costante nel tempo).
In un condensatore caricato a corrente costante, la tensione ai suoi capi sale a rampa, mentre in un induttore sottoposto a tensione costante è la corrente che sale a rampa.
Quindi, è impossibile caricare un condensatore in modo istantaneo (occorrerebbe una corrente infinita); la sua tensione, perciò, è sempre lenta a cambiare.
In un induttore è la corrente che è lenta a cambiare, proprio perché non sono disponibili generatori di tensione di valore infinito. In generale, la variazione di energia in un circuito che comprende elementi reattivi non avviene mai istantaneamente, ma con una costante di tempo propria del sistema, nella quale sono posti in relazione l'elemento che accumula e l'elemento che dissipa.

Coppie di componenti in transitorio

Per le coppie di componenti si possono applicare le medesime leggi, alle maglie e ai nodi, utilizzate per la soluzione dei circuiti elettrici, valide istante per istante.

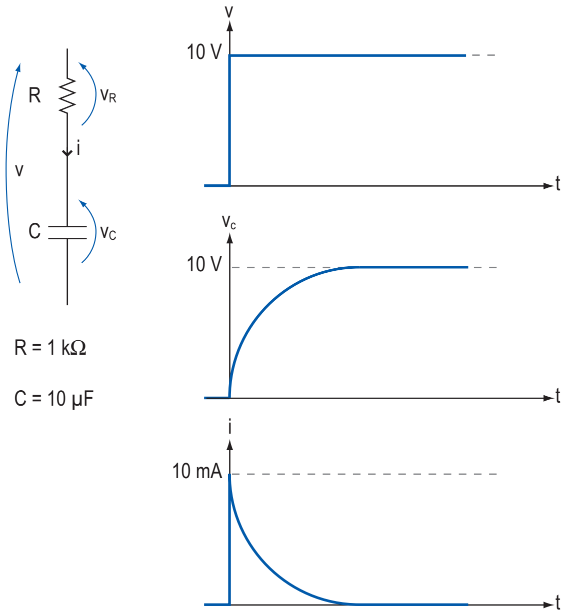

Fig. 3. *Circuito R-C in transitorio di carica.*

In **fig. 3** è riportato un circuito R-C sottoposto a un transitorio di carica con gradino di tensione a 10 V. L'equazione alla maglia è:

$$10 = v_R + v_C \qquad 10 = R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$$

Derivando, si ottiene:

$$0 = R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i$$

Si tratta della forma generalizzata di un'equazione differenziale lineare omogenea di primo grado a coefficienti costanti, la cui soluzione generale è del tipo:

$$i = A + B \cdot e^{p \cdot t}$$

con A e B costanti da ricavare dalle condizioni al contorno e p (polo) che è la soluzione dell'equazione caratteristica associata:

$$0 = R \cdot p + \frac{1}{C} \qquad p = -\frac{1}{R \cdot C} = -\frac{1}{\tau}$$

con:

$$\tau = R \cdot C = 10 \text{ ms}$$

la costante di tempo del circuito.

L'espressione di governo della corrente è:

$$i = 10 \text{ mA} \cdot e^{-\frac{t}{10\text{ms}}}$$

L'andamento della tensione sulla resistenza, per la legge di Ohm, è simile all'andamento della corrente:

$$v_R = 10 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t}{10\text{ms}}}$$

Anche la tensione v_C ha un andamento esponenziale:

$$v_C = 10 - v_R = 10 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{ms}}}\right)$$

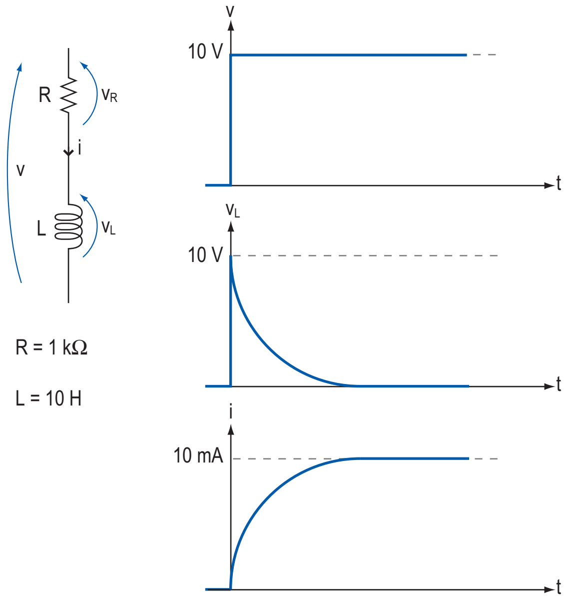

Fig. 4. *Circuito R-L in transitorio di carica.*

In **fig. 4** è riportato un circuito R-L sottoposto a gradino di tensione. Per l'analisi del transitorio, si parte sempre dall'equazione alla maglia:

$$10 = v_R + v_L \qquad 10 = R \cdot i + L \cdot \frac{d\,i}{d\,t}$$

equazione differenziale di primo grado, la cui soluzione è del tipo:

$$i = A + B \cdot e^{p \cdot t}$$

con equazione caratteristica associata:

$$0 = R + L \cdot p \qquad p = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

con:

$$\tau = \frac{L}{R} = 10 \text{ ms}$$

costante di tempo del circuito.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, l'induttanza rappresenta un blocco alla corrente (un circuito aperto) all'istante zero e un cortocircuito al termine del transitorio.

Al termine, il modello matematico per la corrente risulta:

$$i = 10\text{ mA} - 10\text{ mA}\cdot e^{-\frac{t}{10\text{ms}}} = 10\text{ mA}\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{ms}}}\right)$$

Per la legge di Ohm, l'andamento di v_R è simile all'andamento della corrente:

$$v_R = 10\text{ V}\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{10\text{ms}}}\right)$$

Anche la tensione v_L ha un andamento esponenziale:

$$v_L = 10 - v_R = 10\text{ V}\cdot e^{-\frac{t}{10\text{ms}}}$$

Circuito RLC in transitorio

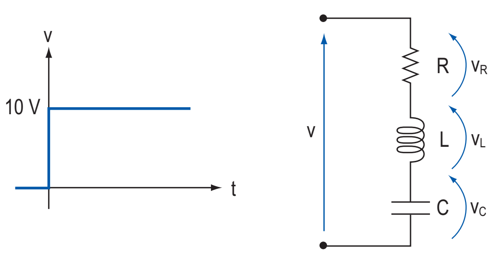

Fig. 5. *Circuito RLC in transitorio.*

Si consideri il circuito in serie di **fig. 5** sottoposto a un gradino di tensione di 10 V. Applicando la legge delle tensioni alla maglia si ottiene:

$$10 = v_R + v_L + v_C$$

sostituendo:

$$10 = R\cdot i + L\cdot\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{1}{C}\cdot\int i\cdot d\,t$$

e derivando:

$$0 = R\cdot\frac{d\,i}{d\,t} + L\cdot\frac{d^2 i}{d\,t^2} + \frac{1}{C}\cdot i$$

Si tratta della forma generalizzata di un'equazione differenziale lineare omogenea di secondo grado a coefficienti costanti.
Per determinarne la soluzione generale, dall'equazione omogenea associata, che è di secondo grado:

$$L\cdot p^2 + R\cdot p + \frac{1}{C} = 0$$

bisogna determinare la natura delle soluzioni (poli).
Bisogna, quindi, ragionare sul discriminante della:

$$p = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$$

1° caso

Se:

$$R^2 - 4L/C > 0,\ \text{cioè se } R > 2\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$$

esistono due radici (due poli) reali e negative e la soluzione è del tipo:

$$i = A\cdot e^{p1\cdot t} + B\cdot e^{p2\cdot t}$$

con A e B che si ricavano dalle condizioni al contorno. Servono due equazioni.
La prima si ottiene imponendo per t = 0, i = 0, perciò 0 = A + B.
La seconda equazione si ottiene, sempre per t = 0, imponendo che tutta la tensione si posizioni ai capi dell'induttanza, perciò:

$$L\cdot\frac{di}{dt} = 10\text{ V}$$

e sostituendo nella derivata della corrente si ha:

$$A\cdot p_1 + B\cdot p_2 = \frac{10\text{ V}}{L}$$

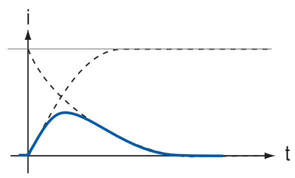

Fig. 6. *Corrente con andamento ipercritico.*

L'andamento della corrente è riportato in **fig. 6**.
È una composizione di due termini esponenziali contrapposti e con costanti di tempo diverse: il primo che sale più veloce e il secondo che scende più lento. Si parla di *smorzamento ipercritico* poiché è grande il valore della resistenza.

2° caso

Con:

$$R^2 - 4\frac{L}{C} = 0,\ \text{cioè } R = R_o = 2\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}$$

esistono due radici (poli) coincidenti, reali e negative:

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L}$$

la soluzione è del tipo:

$$i = A\cdot e^{p1\cdot t} + B\cdot t\cdot e^{p2\cdot t}$$

L'andamento è riportato in **fig. 7** e si parla di *smorzamento critico* poiché le due costanti di tempo coinvolte sono identiche e minime.

La resistenza R_0 è detta appunto resistenza critica.

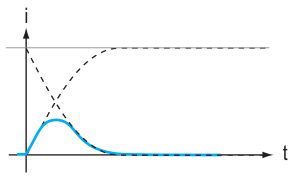

Fig. 7. *Corrente con smorzamento critico.*

3° caso

Con:

$$R^2 - 4\frac{L}{C} < 0, \text{ cioè } R < 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

esistono due radici complesse coniugate ($a \pm j\,k$), con parte reale:

$$a = -\frac{R}{2L}$$

negativa e parte immaginaria:

$$k = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

la soluzione è del tipo:

$$i = e^{-\frac{R}{2L}\cdot t} \cdot [A \cdot \cos(k \cdot t) + B \cdot \text{sen}(k \cdot t)]$$

ad andamento sinusoidale smorzato (**fig. 8**), con frequenza di oscillazione:

$$f_0 = \frac{k}{2\pi}$$

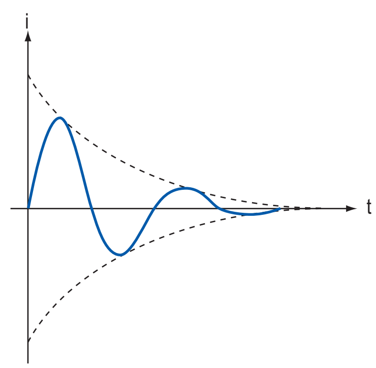

Fig. 8. *Corrente con andamento oscillatorio smorzato.*

In questo terzo caso, la resistenza inserita è piccola e il circuito può oscillare; con resistenze grandi, invece, come nel primo caso, lo smorzamento è forte e il circuito, anziché oscillare, si assesta con lentezza. Si è soliti parlare di fattore di smorzamento:

$$\xi = \frac{R}{R_o}$$

e di andamento con smorzamento ipercritico per $\xi > 1$, critico per $\xi = 1$ e subcritico per $\xi < 1$.

Se poi la resistenza del circuito fosse nulla ($R = 0$), le radici risulterebbero perfettamente immaginarie e coniugate e la risposta sarebbe perfettamente sinusoidale, senza alcuno smorzamento ($\xi = 0$). Naturalmente, questa è solo una situazione ideale, perché nella realtà qualunque componente reattivo presenta una resistenza parassita.

ESERCIZIO A

Il circuito RLC di **fig. 9**, sottoposto ad un gradino di tensione di 10 V, presenta i seguenti valori nei componenti: L = 20 mH, C = 10 µF. Determinare l'equazione della corrente nel circuito, nel caso sia R = 100 Ω, R = 89 Ω, R = 50 Ω ed R = 0.

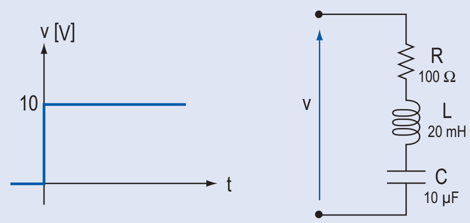

Fig. 9. *Circuito RLC in serie in transitorio.*

SOLUZIONE

Il valore della resistenza critica del circuito è:

$$R_o = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}}} = 89{,}4\ \Omega$$

Nel **primo caso**, essendo R (100 Ω) maggiore di R_0, l'andamento della corrente è con risposta ipercritica, con andamento del tipo:

$$i = A \cdot e^{p1 \cdot t} + B \cdot e^{p2 \cdot t}$$

Dalla:

$$L \cdot p^2 + R \cdot p + \frac{1}{C} = 0$$

si ricavano i poli:

$p_1 = -1.382$ ($\tau_1 = 0{,}72$ ms)
$p_2 = -3.618$ ($\tau_2 = 0{,}27$ ms, risponde per prima)

Considerando le condizioni al contorno, nell'istante iniziale, t = 0, si ha corrente nulla, quindi:

$i = 0$	$0 = A + B$

inoltre, tutta la tensione è ai capi dell'induttanza, perciò:

$$L \cdot \frac{di}{dt} = 10\ V \qquad A \cdot p_1 + B \cdot p_2 = \frac{10\ V}{L}$$

da cui si ricava:

$$A = -B = 0{,}223$$

L'espressione della corrente è quindi:

$$i = 0{,}223 \cdot e^{-1.382 \cdot t} - 0{,}223 \cdot e^{-3.618 \cdot t}$$

(il secondo termine esponenziale parte prima e si esaurisce per primo).

Nel **secondo caso** ($R = 89\ \Omega$), essendo R uguale ad R_0, l'andamento della corrente è critico. La soluzione è del tipo:

$$i = A \cdot e^{p1 \cdot t} + B \cdot t \cdot e^{p2 \cdot t}$$

con:

$$p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -2.225$$

Inoltre, dalle condizioni al contorno:

$$\text{per } t = 0, \quad i = 0, \quad 0 = A$$

$$\text{per } t = 0, \quad L \cdot \frac{di}{dt} = 10\ V$$

$$B \cdot [e^{-2225 \cdot t} + t \cdot (-2.225) \cdot e^{-2225 \cdot t}] = \frac{10\ V}{L}$$

$$B = \frac{10\ V}{L}; \quad i = \frac{10\ V}{L} \cdot t \cdot e^{-2225 \cdot t}$$

Nel **terzo caso** ($R = 50\ \Omega$), essendo $R < R_0$, la soluzione è con andamento ipercritico (**fig. 10**).

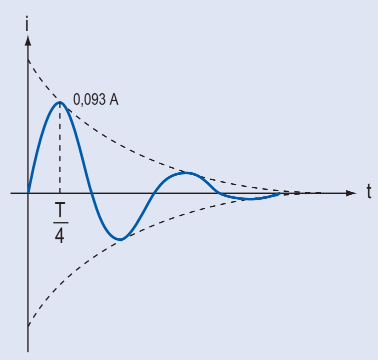

Fig. 10. *Corrente con andamento ipercritico.*

Le radici dell'equazione:

$$L \cdot p^2 + R \cdot p + \frac{1}{C} = 0$$

sono complesse coniugate:

$$p_1 = 1.250 + j\ 1.854 \text{ e } p_2 = 1.250 - j\ 1.854$$

L'equazione della corrente è del tipo:

$$i = e^{-1250 \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(k \cdot t) + B \cdot \text{sen}(k \cdot t)]$$

ad andamento sinusoidale smorzato, con frequenza di risonanza:

$$f_0 = \frac{k}{2\pi} = \frac{1.854}{2\pi} = 295\ \text{Hz}$$

Dalle condizioni al contorno:

$$\text{per } t = 0, \quad i = 0, \quad 0 = A$$

inoltre:

$$\text{per } t = 0, \ L \cdot \frac{di}{dt} = 10\ V$$

derivando,

$$B \cdot [-1.250 \cdot e^{-1250 \cdot t} \cdot \text{sen}(1.854 \cdot t) + e^{-1250 \cdot t} \cdot 1.854 \cdot \cos(1.854 \cdot t)] = \frac{10\ V}{L}$$

sostituendo t = 0:

$$B \cdot 1.854 = \frac{10\ V}{L}$$

dalla quale si ricava:

$$B = \frac{10}{1.854 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 0{,}27$$

L'equazione risultante per la corrente è:

$$i = e^{-1250 \cdot t} \cdot [0{,}27 \cdot \text{sen}(1.854 \cdot t)]$$

Il picco più alto della corrente si ha all'incirca dopo $\pi/2$:

$$(\text{ovvero dopo un tempo } t = \frac{\pi}{2 \cdot 1.854} = 847\ \mu s)$$

e vale 0,093 A (**fig. 10**)

Nel **quarto caso**, con $R = 0\ \Omega$, le radici sono immaginarie e coniugate, $p = \pm j\ 2.230$. La corrente perciò è periodica, non smorzata, del tipo:

$$i = 1 \cdot [A \cdot \cos(k \cdot t) + B \cdot \text{sen}(k \cdot t)]$$

ad andamento sinusoidale (**fig. 11**), con frequenza di risonanza:

$$f_0 = \frac{k}{2\pi} = \frac{2.230}{2\pi} = 355\ \text{Hz}$$

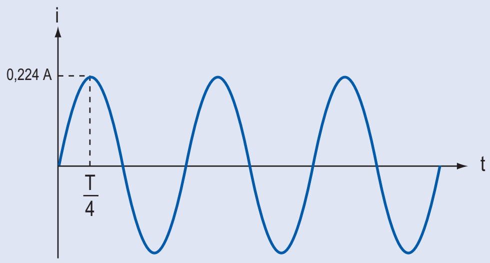

Fig. 11. *Corrente con andamento sinusoidale.*

Dalle condizioni al contorno:

$$\text{per } t = 0, \quad i = 0, \quad 0 = A$$

$$\text{per } t = 0, \quad L \cdot \frac{di}{dt} = 10\ V$$

derivando:

$$B \cdot 2.236 \cdot \cos(2.236 \cdot t) = \frac{10\ V}{L}$$

sostituendo t = 0 si ottiene:

$$B \cdot 2.230 = \frac{10\ V}{L},$$

ovvero:

$$B = 0{,}224$$

L'espressione della corrente è quindi:

$$i = 0{,}224 \cdot \text{sen}(2.230 \cdot t)$$

più veloce della precedente e con il picco, dopo $\pi/2$, al valore 0,224 A, più alto del precedente.

Da notare il "luogo delle radici" riassunto in **fig. 12**, utile per lo studio della stabilità dei sistemi in generale.

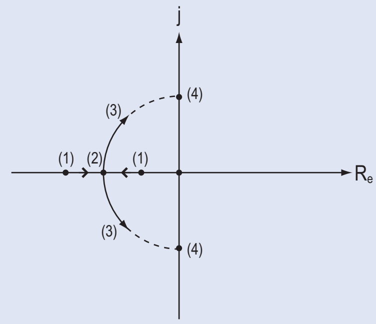

Fig. 12. *Luogo delle radici.*

Nel piano dei numeri complessi, si riportano le posizioni dei poli delle funzioni ricavate negli esercizi precedenti: riducendo il valore dell'elemento dissipativo (la resistenza), in un sistema del secondo ordine, le radici diventano complesse e il sistema risponde a una sollecitazione a gradino con andamento oscillatorio. La risposta sinusoidale perfetta si ha quando le radici sono complesse, coniugate e a parte reale nulla.

ESERCIZIO 1

Il circuito di **fig. 13** è sottoposto a un gradino di tensione di 10 V; determinare il valore della corrente i dopo 1 ms.

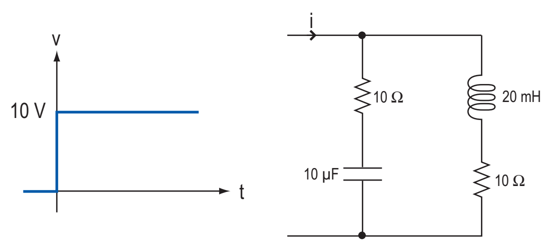

Fig. 13. *Circuito parallelo sottoposto a transitorio.*

[Ris.: $i_C = 1\ A \cdot e^{-\frac{t}{1\ ms}}$; $i_L = 1\ A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2\ ms}}\right)$;
i (1 ms) = 0,37 A + 0,393 A = 0,763 A]

Risposta di un circuito RLC al transitorio

Si vuole sperimentare in simulazione, la risposta di un circuito RLC al transitorio.
Disegnare il circuito in **fig. 1**, completo del generatore impulsivo di tensione, e attivare *Simulate*▶*Analyses* ▶*Transient Analysis*, per l'analisi della tensione V(3) sul condensatore, fino a ottenere il grafico riportato in **fig. 2**.

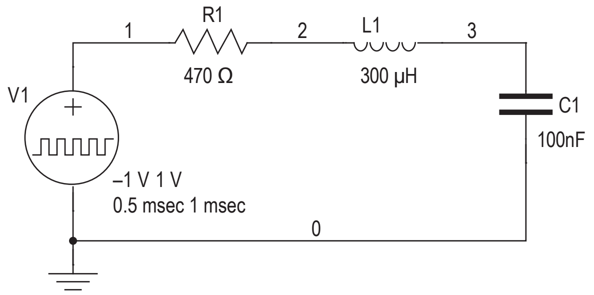

Fig. 1.

Riprovare modificando R1 = 110 Ω, e successivamente R1 = 50 Ω. Commentare i risultati ottenuti. Misurare ampiezza picco-picco e periodo delle oscillazioni ottenute con R1 = 25 Ω, 5 Ω, 1 Ω (per una misura più precisa, nella scheda *Transient Analysis* si consiglia di ridurre sia *TSTOP* = 0,0001 s, sia *TMAX* = 1e-006, e visualizzare anche V(1)). Completare la **tab. 1** e commentare i risultati ottenuti.

Tab. 1 - Risultati

R1 [Ω]	oscillazione	
	picco-picco	periodo
25		
5		
1		

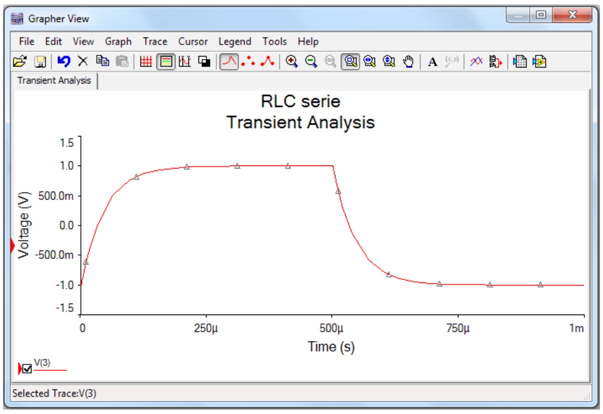

Fig. 2. *Transient Analysis.*