Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2i(3-i)-6i=2$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(-1)=f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x-1}=9^x$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele mai mici sau egale cu 3.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,-1)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin 2x-2\operatorname{tg}x\cdot\sin\frac{2x}{3}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{xy(x+y)}{xy+1}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale nenule, cu $m\le n$, pentru care $\frac{1}{m}*\frac{1}{n}=\frac{1}{16}\cdot(m*n)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=n$ are soluție unică, pentru orice număr natural nenul n.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{5}} f(x)\,dx = \frac{19}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, $n \geq 2$, se consideră numărul $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}\,dx$. Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că media aritmetică a numerelor $a=20-\sqrt{21}$ și $b=22+\sqrt{21}$ este egală cu 21.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3-x$. Arătați că $f(a)+g(a)=2$, pentru orice număr real a.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{7x-6}=x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(6,6)$. Arătați că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, astfel încât $AC=4$ și măsura unghiului B este egală cu $60°$. Arătați că înălțimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 2.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x\\ x & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Arătați că $A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=2I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=3I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4(xy+1)-3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 2=3$.

5p **b)** Arătați că, dacă $a\circ 3=4$, atunci $a\circ(-a)=0$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x\circ 1)\circ(x-1)\le 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+x+3-5\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.

5p **c)** Demonstrați că $2x^2+x\ge 3+5\ln x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-2x)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-5$.

5p **c)** Determinați $a\in(-\infty,1)$ pentru care $\displaystyle\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}\,dx=\frac{2}{9}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1+6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$. Arătați că $f(3)-f(2)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+1}=2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, numărul $10-n$ să fie par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,0)$ și $B(a,6)$, unde a este număr real. Arătați că $AB=6$, pentru orice număr real a.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=5$ și $AC=2AB$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 25.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că $A-4I_2=3B$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X+X\cdot B=A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy(x+y-4)$.

5p **a)** Arătați că $2*3=6$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $1*x=4$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $2^x*2^x=2^{3x}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-9x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3x(x-6)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{3f(x)-xf'(x)}=\frac{2}{3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=2-e$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n>2$, pentru care $\int_2^n\frac{x}{f(x)\cdot f(-x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}$.

Examenul de bacalaureat național 2022
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 7

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\log_2 16 - \log_2 8 + \log_2 1 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+7$. Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m,2022)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5x-2}=\sqrt{3}$.

5p **4.** După două scumpiri succesive cu 20% prețul unui obiect este de 180 lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,7)$ și $B(2,5)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Arătați că $\left(\sin 45^\circ - \sin 30^\circ\right)\left(\sin 45^\circ + \sin 30^\circ\right) = \frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 5(x+y) + 7$.

5p **1.** Arătați că $(-2)\circ 2 = 3$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **3.** Demonstrați că $x\circ y = (x+5)(y+5)-18$, pentru orice numere reale x și y.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x = 7$.

5p **5.** Demonstrați că $\left((-x)\circ(-y)\right)+\left((-x)\circ y\right)+\left(x\circ(-y)\right)+\left(x\circ y\right)=28$, pentru orice numere reale x și y.

5p **6.** Determinați perechile (a,b) de numere întregi pentru care $a\circ b = -19$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **1.** Arătați că $\det A = 0$.

5p **2.** Arătați că $A\cdot A = A$.

5p **3.** Arătați că $X(-1)+X(1)=2I_2$.

5p **4.** Demonstrați că $X(a)\cdot X(-1)=X(-1)$, pentru orice număr real a.

5p **5.** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ **nu** este inversabilă.

5p **6.** Determinați valorile reale ale lui a pentru care $\det\left(X\left(a^2\right)\right)\le 10$.