Pomáháme
školám
k úspěchu

Úspěch v matematice

Milan Hejný

Příběh této knihy

Pomáháme školám k úspěchu je vzdělávací projekt Nadace THE KELLNER FAMILY FOUNDATION zaměřený na zvyšování kvality výuky ve veřejných základních školách s důrazem 'na individuální přístup učitelů k žákům. Cílem je, aby se každý žák v zapojených školách učil naplno a s radostí. Jak toho ale dosáhnout v matematice, v jednom z nejnáročnějších předmětů?

Hejného metoda nabízí promyšlené a vyzkoušené postupy, jak žáky aktivně zapojovat do řešení matematických úloh a ponechat jim radost z objevování. Osvědčila se v mnoha českých školách. Rozvíjí nejen matematické myšlení a schopnost řešit problémy, ale i řadu sociálních dovedností.

Zavádění Hejného metody do praxe ale není úplně snadné. Vidíme to v našich projektových školách, ve kterých většina učitelů na prvním stupni tuto metodu dobrovolně používá. Ukazuje se například, že i pro zkušené pedagogy bývá náročné vyučovat tak, aby děti přemýšlely a mluvily delší část vyučování než učitel. Podobně těžké bývá ovládnout nutkání upozorňovat hned děti na chyby, učit je dodržovat „jediný správný postup", okamžitě jim sdělovat výsledky a podobně.

Proto jsme se rozhodli v letech 2012–2017 spolupracovat s panem profesorem Hejným a jeho týmem nejen při vzdělávání pedagogů, ale i na tvorbě této příručky. Vznikl tak studijní text, který na praktických příkladech a úkolech pomáhá pochopit podstatu Hejného metody a účinně ji používat v praxi. Na příručku volně navazuje řada metodických videí s odborným komentářem na veřejném YouTube kanálu Pomáháme školám k úspěchu.

Pedagogové zapojení do našeho projektu se podíleli na pilotáži příručky. Vznesli více než 300 námětů, jak upravit text, aby byl pro učitele srozumitelný a použitelný. Mimo jiné ověřili, že kniha je dobře využitelná při samostudiu, ale že ještě lépe pomáhá, když s ní mohou pracovat týmově ve skupině kolegů, kteří Hejného metodu používají.

Příručka ve spojení s vytvořenými videoklipy může nyní fungovat jako cvičebnice pedagogického myšlení pro učitele, kteří chtějí používat Hejného metodu co nejlépe. Budeme rádi, když Vám tato publikace pomůže přiblížit se k našemu společnému cíli. Aby se každé dítě mohlo učit (nejen) matematiku naplno a s radostí.

Vladimír Srb
Pomáháme školám k úspěchu o.p.s.

Obsah

Formální poznatek 2

Číslo 3

Práce s číslem 4

Úvod ke knize

Školská matematika patří k neoblíbeným předmětům. Mnozí žáci před matematikou utíkají, ale jiní se na hodinách matematiky nudí. Znalosti žáků nesplňují očekávání společnosti. S tímto školním neduhem zápasíme již několik desetiletí, ale situace se nezlepšuje, spíše naopak.

V posledních letech se zde ukazuje jistá naděje. Způsob vyučování matematiky, který již před více než 60 lety nastínil a ve své praxi úspěšně používal Vít Hejný, ukazuje na možnosti situaci zlepšit. Koncepce vyučování matematice Víta Hejného byla v posledních 40 letech rozpracována týmy učitelů a didaktiků v Bratislavě a Praze. Pražský tým napsal učebnice pro 1. až 5. ročník ZŠ, a tím umožnil zavedení nové metody do škol. Učitel, který se rozhodl učit touto novou metodou, musí výrazně měnit dosavadní způsob vyučování. Jeho úsilí je odměněno tím, že žáci mají matematiku rádi, na hodiny matematiky se těší a dosahují výborných výsledků. Již ve školním roce 2014/2015 se tato metoda úspěšně používala ve stovkách tříd.

K současnému úspěchu metody, zejména k propracování metod jejího zavádění do škol, přispělo i zapojení našeho výzkumného týmu do projektu Pomáháme školám k úspěchu. Projekt nám umožnil systematicky a po dobu několika let ovlivňovat práci učitelů v několika školách a sledovat, k jakým změnám dochází v pedagogickém přesvědčení spolupracujících učitelů, jak se mění jejich výuka matematiky a jak to ovlivňuje klima školy.

Co je podstatou nové metody, kterou dnes nazýváme genetickým konstruktivis-mem? Odpověď najdeme ve výsledcích třicetileté práce Víta Hejného, který jako středoškolský učitel zjistil, že:

- strach žáků z matematiky je důsledkem toho, že žák se jednotlivé poučky a postupy učí zpaměti a obává se, že mu z paměti něco vypadne;
- někteří žáci strach nemají a matematice rozumí; tito nad matematikou hloubají a mnohdy sami některé věci odhalí.

Obecné mínění říká, že žáci, kteří matematice rozumí, mají „buňky na matematiku“. Vít Hejný se domníval, že i žáky, kteří uvedené buňky nemají, lze do jisté míry získat. Pomocí přiměřených úloh jim dodat sebedůvěru, že jsou schopni aspoň něco samostatně odhalit. Ve svém vyučování oslaboval výklad a rozšiřoval spektrum úloh, které žákům předkládal. Po několika letech nabyl přesvědčení, že:

- počet žáků, kteří jsou schopni samostatně matematiku odhalovat, je výrazně vyšší, než si původně myslel;
- rozhodující je výuku individualizovat, dávat každému žákovi jemu přiměřené úlohy;
- iniciovat vzájemné diskuse mezi žáky, protože ty výrazně urychlují postup jak těch slabších, kteří se to od schopnějších spolužáků učí, tak i těch zdatnějších, neboť doscendo discimus (učíce jiné sami sebe učíme).

Když mně (Milanovi Hejnému) bylo pět let, začal mi otec dávat různé hádanky a do svých poznámek si tenkrát napsal:
„Miňuška baví ty úlohy, u kterých má životní zkušenosti; ty musím hledat.“

Uvedený seznam šesti myšlenek otce lze považovat za východisko našich dalších výzkumů. Otcova pozůstalost obsahuje desítky stran dalších pozorování, komentářů a úvah, které silně přesahují oblast didaktiky matematiky. Byly publikovány v Archívu Víta Hejného I a II (Bachratý, H., 2012 a 2016).

V současnosti můžeme jádro metody genetického konstruktivismu formulovat v šesti tezích:

1. Třída je schopna odhalit skoro celou matematiku sama.

2. Matematika, kterou žáci odhalují, je vložena do různých, vzájemně propojených matematických prostředí, z nichž ta nejzávažnější jsou opřena o životní zkušenosti žáka.

3. Žák řeší úlohy, na které stačí a každá vyřešená úloha rozšiřuje jeho zkušenost v jisté oblasti. Tyto zkušenosti nazýváme izolovanými modely příštího poznání. Když se několik příbuzných izolovaných modelů ve vědomí žáka propojí, dojde k objevu: žák uvidí generický model, tedy to, co mají tyto izolované modely společné. Toto obecné poznání nepřichází zvenčí, ale vzniká přímo ve vědomí žáka a jeho objev je provázen velikým pocitem radosti.

4. Některé generické modely začnou na sebe vzájemně poukazovat a seskupují se do větších celků, které nazýváme mentální schémata.

5. Vše to probíhá v hlavě jednoho žáka, který ale o svých myšlenkách diskutuje se spolužáky. Různí žáci stejnou věc vidí různě a šíře pohledů pomáhá každému z diskutérů obohatit a upřesnit vlastní poznání.

6. Role učitele spočívá v organizaci práce. Vít Hejný přirovnával třídu k orchestru a učitele k dirigentovi. Dirigent nepomáhá houslistovi hrát a učitel neukazuje žákovi, jak to má řešit. Stejně jako úspěch dirigenta i úspěch učitele závisí nejen na partituře (učivu), ale hlavně na tom, jak on „zná své ovečky".

Co se týče názvu publikace Úspěch v matematice, dovolte mi krátký komentář. Úspěch je dvojího typu. Ten, který lze vyjádřit *vnějším hodnocením* nebo číslem – známkou ve škole, výkonem ve sportu, penězi při ocenění třeba auta. Je zde ale i úspěch, který číslem vyjádřit nelze. Například úspěch při překonání zákeřné nemoci nebo úspěch v lásce. Žák, který po několika nezdarech nakonec vyřeší náročnou matematickou úlohu, *vnitřně* prožívá úspěch. Učitel si nechá od žáka vykládat, jak s úlohou zápasil, jak opakovaně troskotal, ale jak nakonec uzřel řešení. Učitel jako přející posluchač u tohoto vypravování též zažívá úspěch, protože má na žákově úspěchu svůj podíl. Smyslem této publikace je pomáhat učitelům myslet a vyučovat tak, aby mohli se svými žáky *prožívat vnitřní úspěch v každé hodině matematiky*.

Milan Hejný

Proces poznávání

1

Úvod

1.1

Tato publikace je určena učitelkám a učitelům, kteří mají potřebu zlepšovat vlastní pedagogickou práci při vyučování metodou genetického konstruktivismu (pro výuku matematiky podle prof. Hejného). Její velikou ambicí je využití v seminářích s učiteli. Předpokládá se, že čtenáři, resp. účastníci seminářů, již měli příležitost seznámit se s učebnicemi a příručkami učitele pro tuto výuku a uvažovat nad východisky této metody i vlastní pedagogickou praxí. Věříme, že publikace jim umožní dále prohloubit jejich znalosti, obohatit jejich zkušenosti a zkvalitnit jak přímou práci s dětmi, tak i komunikaci s rodiči, kolegy či vedením školy.

Tvorba teorie procesu poznávání si vyžádala doplnění potřebné terminologie. Ta je přehledně uspořádána do slovníku umístěného za celým textem.

Naše učebnice vydané nakladatelstvím Fraus pro první až pátý ročník označujeme F1 až F5. Znak F2/3;15 značí třetí díl učebnice pro druhý ročník, stranu 15. Podobně je tomu u dalších případů[1].

Vzhledem k náročnosti textu (dané nejen novou terminologií) a četným odkazům na příběhy i na jiná místa uvnitř textu je třeba počítat s tím, že tato publikace jako každá odborná literatura vyžaduje čas a předpokládá vlastní reflexi i návraty do míst, jimiž čtenář již prošel. Reflexe je podpořena řadou tzv. výzev, které orientují čtenáře k získávání vlastních zkušeností a hlubšího vhledu do zkoumané problematiky. Umožňují jak obohatit porozumění o další nezávislé úvahy, tak je dále prohloubit a posílit autonomní uvažování i na straně učitele. Až na výjimky výzvy záměrně nejsou řešeny, aby je bylo možné účinně využít k vyvolání a podpoře diskuse.

Základy teorie procesu poznávání, kterou používáme zde a v celé naší koncepci vyučování matematice, vytvořil Vít Hejný v letech 1942 až 1977[2]. Vít Hejný viděl, že běžný model výuky nevede k propojování a strukturování poznatků. Ty se při důrazu na nácvik a napodobování ukládají a vybavují jen jako izolovaná fakta – jsou to pouze formální poznatky, které žák jen stěží může prakticky využít. Zároveň je takový způsob formálního „učení" zavádějící pro pochopení podstaty vzdělávání. Při opakovaném setkávání se s formalismem se dítěti tento způsob „učení" stane vlastním, dítě očekává návody, nevěří si, považuje za normální dozvídat se, jak se která úloha řeší, jeho rozvoj stagnuje. Ve skutečnosti má ale dítě přirozenou potřebu vlastního rozvoje, potřebu se skutečně učit[3]. Když budeme vědět, co pomáhá dítěti rozvíjet se, jak vlastně dítě poznává, budeme moci také zjišťovat, kdy tomu tak není, kdy nejde o učení, ale pouze o formální přebírání hotových poznatků.

Potřeba nalézt účinný nástroj pro prevenci, diagnostiku a nápravu již získaného formálního přístupu k vlastnímu vzdělávání se stala motivem pro vytvoření teorie procesu poznávání. Nástroj byl v uplynulých 35 letech rozpracováván a nazván **Teorie generického modelu**. Aktualizovanou verzi teorie lze najít v knize Milana Hejného a Františka Kuřiny *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*.[4]

2012).

Vstup do teorie procesu poznávání otevřeme ukázkou, v níž žáci postupně objevují, jak se v násobilkovém čtverci mění součet středových čísel v závislosti na hodnotě levého horního rohového pole.

1
HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007–. – HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. 4 sv. – HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. 4 sv. – HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. 4 sv. – HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. 4 sv.

2
Teorií poznávacího procesu, které byly vyvinuty pro matematiku, ale mohou mít i širší platnost, existuje více. Patří mezi ně například teorie proceptu (slovo vzniklé spojením slov proces a koncept) či teorie APOS, vztahující se především k vysokoškolské matematice (kde jednotlivá písmena značí čtyři etapy poznávacího procesu – Akce, Proces, Objekt, Schéma). Obě tyto teorie jsou blíže vysvětleny v HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. 1. vyd. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2014. 229 s.

3
Kdybychom děti učili mluvit, nikdy by se to nenaučily (úvodní motto v knize HOLT, John Caldwell. Proč děti neprospívají. 1. vyd. Praha: Strom, 1994. 156 s.).

4
HEJNÝ, Milan – KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 3. vyd. Praha: Portál, 2015. 232 s.

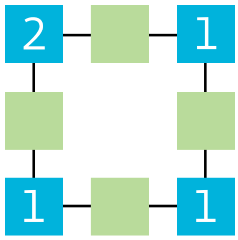
5
Alternativně se používá termín Součinový čtverec. Na obr. 1 má modrá *rohová* čísla, v zelených polích budou *středová* čísla. Každé středové číslo je součinem těch dvou rohových čísel, která jsou mu nejblíže.

6
HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*, op. cit., s. 22.

1 Příběh
Petr s Pavlem objevují zákonitost v prostředí násobilkových čtverců[5]

Ve třetím ročníku řešili žáci cvičení 3 z F3; 22:[6]
Vyřeš násobilkový čtverec a zjisti součet čtyř středových čísel. Stejnou úlohu vyřeš i v případě, že je místo čísla 2 v levém horním rohovém poli číslo 3, 4, 5, 6, 9, 10, 19.

Obr. 1



Někteří žáci pracovali individuálně, někteří ve dvojicích. Petr s Pavlem rychle zjistili, že odpovědí na první úlohu je číslo 6. Pak si práci rozdělili. Petr bude zjišťovat odpovědi pod čísly 3, 4, 5 a 6. Pavel se postará o poslední tři čísla. Hoši již mají zkušenosti, že u podobných úloh budou výsledky nějak uspořádané, proto Petr hned načrtl tabulku (Tab. 1), do které budou výsledky zaznamenávat. Do horního řádku nadepsaného roh si vyplnili zadaná čísla 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 19:

Tab. 1

roh	2	3	4	5	6	9	10	19
součet	6	8	10	12		20		

Do tabulky pod číslo 2 Petr vepsal výsledek 6. Po chvíli byla dopsána další pole: pod číslem 3 bylo 8, pod číslem 4 bylo 10, pod číslem 5 bylo 12 a pod číslem 9 bylo 20. Pavel počítal dále, ale Petr zvolal: „Hele, šest, osm, deset, dvanáct; jde to po dvou." Ukázal, jak čísla v druhém řádku narůstají. Do tabulky mezi čísla 6 a 9 natěsnal čísla 7 a 8. Pavel: „No jo, po dvou..." a dopsal pod čísla 6, 7, 8 a 10 čísla 14, 16, 18 a 22. S nepřehlednou tabulkou pádili hoši za učitelkou, aby jí ukázali svůj objev prvního pravidla:

Čísla v řádku „součet" narůstají po dvou. (1)

Učitelka se zeptala, zda to opravdu kontrolovali a zda by uměli zjistit i to, jaký bude součet, když v rohovém poli bude číslo 50. Dodala, že stejnou úlohu již řeší Tamara s Radkou i Pepa.

Hoši pro jistotu ještě společně kontrolovali, že pod číslem 19 je 40 a pak Pavel navrhl, ať „jedou po pěti", podobně jako minule. Tak vznikla tabulka 2.

Tab. 2

roh	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
součet	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102

Pomocí pravidla (1) rychle do nové tabulky doplnili čísla 12, 22 a 32. Pavel řekl: „Jde to po deseti." Hned dopsal celý druhý řádek. Vše bylo jasné i Petrovi. Hoši objevili druhé pravidlo:

Čísla řádku „součet" v tabulce 2 narůstají po deseti. (2)

Šli výsledek oznámit učitelce. Ta již přihlížela, jak u tabule Pepa ukazoval hrstce zájemců svůj objev – objev třetího pravidla:

„Ten součet, to je dvakrát to číslo v rohu, plus dvě." (3)

Pavel se vrátil do lavice, podíval se na tabulku 2 a řekl: „Hele, no jo, dvakrát pět je deset a dvě je dvanáct, dvakrát deset je dvacet a dvě je dvacet dva, je to dobrý!" Petr dodal: „Já to viděl tady u té padesátky i desítky." Asi mu bylo líto, že to neřekl, protože cítil, že objev (3) je silnější než objev (2). Konec příběhu.

Izolovaný model a generický model

1.2

Pomocí příběhu 1 osvětlíme dva základní termíny poznávacího procesu – izolovaný a generický model. Nejprve hoši počítali jednotlivé případy a moudře je zapisovali do tabulky. Každý výpočet, který hoši zapsali do tabulky 1, budeme nazývat **izolovaným modelem** (IM) příštího poznatku. Druhý řádek tabulky ukazoval na pravidelnost. Petr ji objevil, Pavel potvrdil a hoši odhalili pravidlo (1). Pravidlo, které hoši vyvodili z izolovaných modelů, budeme nazývat **generickým modelem** (GM) příštího poznatku.

Pomocí objeveného GM (1) mohou hoši prodlužovat vytvořenou tabulku libovolně. Mohou dojít i k číslu 50, které jim dala učitelka. Oba ale cítí, že by to bylo dosti pracné a vědí, že když tento výsledek přinesou učitelce, ta bude po nich chtít číslo podstatně větší – třeba 500. Proto se snaží najít šikovnější způsob, jak se dostat k velikým číslům. Vytvoří tabulku 2 a pomocí ní odhalí další objev, generický model (2).

Tabulka 2 je „rychlejší" než tabulka 1, přesto ani ona neumožňuje v rozumném čase zvládat velká čísla, jako například 2012. To umožňuje až Pepův objev pravidla (3), které je též generickým modelem příštího poznatku. Podle něj je pro rohové číslo 2012 součet čtyř středových čísel roven 2 × 2012 + 2 = 4026.

Je jasné, že generický model (3) je efektivnější než generické modely (1) a (2). Podstata odlišnosti spočívá v tom, že GM (1) a (2) umožňují najít výsledek procesem prodlužování tabulky, zatímco GM (3) dává „vzorec", jak najít výsledek ihned, jediným výpočtem.

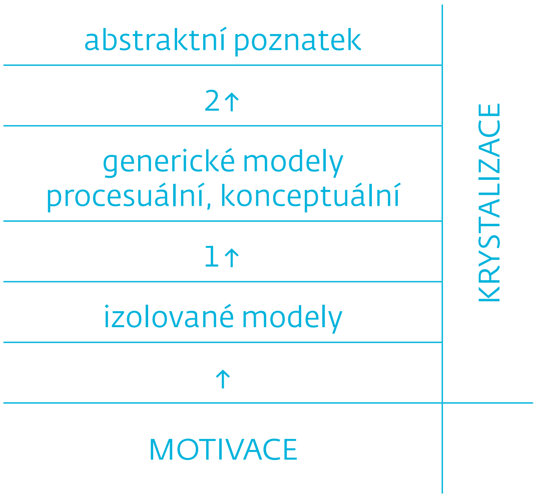
GM (1) a (2) jsou **procesuálními** generickými modely, GM (3) je modelem **konceptuálním**. Co vyjadřují tyto názvy? **Procesuálním** generickým modelem nazýváme návod, jak *postupně* dojít k výsledku. **Konceptuálním** generickým modelem je slovně vyjádřený vzorec, který umožňuje najít výsledek ihned, dosazením. Více o procesu a konceptu v kapitolách 1.9 a 1.10.

Pepův objev pravidla 3 je tedy objevem konceptuálního GM hledaného poznatku. Když později zapíše Pepa svoje pravidlo pomocí písmen $s = 2r + 2$ (r je rohové číslo a s je součet středových čísel), bude to již **abstraktní poznatek**.

Pět složek poznávacího procesu

Známe již dvě etapy poznávacího procesu – etapu izolovaných modelů a etapu generických modelů. Zmínili jsme se i o etapě další – o abstraktním poznatku. Teď se podíváme na celý poznávací proces. Rozčleníme jej do pěti složek. Čtyři složky jsou etapami a pátá složka má průřezový charakter (Obr. 2):

Obr. 2



Klíčovou roli hraje etapa generických modelů, která dala celé teorii jméno. Viděli jsme, že etapa byla rozložena na část objevu procesuálního a část objevu konceptuálního. Je tomu tak v mnoha případech, ale ne vždy. Proto je na obrázku 2 etapa GM uvedena jako jeden celek.

O matematických znalostech žáka vypovídá nejvíce soubor jeho generických modelů. Proto jsou generické modely rozhodující při diagnostice matematických vědomostí žáka.

Jednotlivé etapy poznávacího procesu pojednáme podrobněji v sekcích 1.4–1.8.

Motivace[7]

1.4.1 Příběhy z běžného života

Žáci motivovaní potřebou objevovat matematiku jsou v našich školách spíše výjimkou. Pro šestileté děti, přicházející do školy, to neplatí. Ty mají zájem o vše, co je kolem, tedy i o čísla a tvary. Proč se tato potřeba poznávat (nejen) matematiku v průběhu prvních let školy tlumí a vytrácí? Ona je někdy utlumována již rodiči v předškolním věku dítěte. Ukazují to tři příběhy.

2 **Příběh**
Fotbal v televizi, nebo na dvorku

Táta se sedmiletým synem sledují v televizi fotbalový zápas. Syn žádá tátu, aby si šli na dvůr zakopat. Táta je zabrán do zápasu a odmítá. Hoch bere míč a jde na dvůr sám.

3 **Příběh**
Mami, já ti budu pomáhat

Máma myje nádobí a čtyřletá dcerka jí chce pomáhat, chce nádobí utírat.
Tři hypotetické matky reagují třemi různými způsoby.

A. Matka Anežka se bojí, že dcerka něco rozbije, že ji zdrží od práce, a tak dcerku odbude, že ještě je malá, že na to má čas. Dívka odchází hledat jinou činnost.

B. Matka Blažena začne dívce opakovaně ukazovat, jak držet utěrku, jak hrneček; stále dívce radí, opravuje její počínání, žádá co nejvěrnější napodobení vlastních pohybů.

C. Matka Cecílie vítá snahu dcerky. Dívka utírá příbory a ukazuje mamince, jak to dělá. Maminka ji povzbuzuje a děkuje jí za pomoc.

Výzva 1
V příbězích 2 a 3 (A., B., C.) se objevují čtyři interakce rodič–dítě. Pokuste se popsat, co se v důsledku jednání rodiče asi odehrává v mysli dítěte. Pak jednání rodiče ohodnoťte.

Komentáře k příběhům 2 a 3
V příběhu 2 se otec domnívá, že syna zápas nezajímá. Není tomu tak. Syna zápas zajímá, ale jeho potřeba nabývat vlastní zkušenosti je silnější než jeho potřeba prožívat zápas. Uvítal by určitě ochotu otce jít si zakopat.

Matka Anežka v příběhu 3 na nabízenou pomoc hledí účelově, z pohledu svého zájmu, podobně jako otec v předchozím příběhu. Neuvědomuje si, že nejdůležitějším výsledkem činnosti dítěte není utřené nádobí, ale to, jaké zkušenosti dívka získá. Navíc zahazuje příležitost k budování sociálních pracovních vazeb s dcerkou. To je chyba ještě závažnější. Dívka je zklamána nevstřícností matky.

Blažena si neuvědomuje, že základem poznání je osobní zkušenost dítěte. Silnou intervencí a snahou urychlit růst schopností dívky pomocí návodů její rozvoj ve skutečnosti zpomaluje. Dívce není dovoleno nabývat vlastní zkušenosti, je zahnána do intelektuální nečinnosti a je pravděpodobné, že se bude

7
Ne vždy je žák k matematice motivován. Nezřídka bývá nucen. Pak nemluvíme o motivaci, ale stimulaci. Rozdíl vychází z latinských slov: moveō = hýbati, pohybovati, stimulō = ostnem bodati, píchati.

8
Znak (*) zde vyjadřuje jakýkoli objekt.

v budoucnu podobné situaci vyhýbat. Její potřeba získávání zkušeností naplněna nebyla. Byla vytěsněna maminčinými instrukcemi.

Cecílie je úspěšnou učitelkou vlastní dcerky. Dívka má prostor pro získávání vlastních zkušeností a upevňování citových i pracovních vazeb s matkou. Dívka bude pomáhat mamince i napříště.

1.4.2 Motivace – příběhy „2 + 3 = 5“

4 **Příběh**
Pětiletý Filip počítá jablíčka

Pětiletý Filip spočítal, že 2 jablíčka a 3 jablíčka dohromady je 5 jablíček. Potom měl spočíst 2 bonbony a 3 bonbony. Hoch začal počítat. Otec jej přerušil a ukázal mu, že nemusí počítat, co již bylo spočítáno. Stačí využít předcházející výsledek.

Komentář k příběhu 4
Otec v tomto příběhu chlapci ukázal, že vztah 2 + 3 = 5 je stejný, ať již k počítání použijeme prsty, židle, autíčka, nebo sirky. Hoch tátovo vysvětlování pochopil, ale nadšení z nové znalosti neprojevoval. Jeho potřeba nabývat vlastní zkušenosti byla vytěsněna tátovou instrukcí.

Poznatek, že součet 2* + 3* = 5* nezávisí na objektech[8], ke kterým je vázán, byl Filipovi vnucen. Jistě by se k tomuto poznatku hoch dopracoval i samostatně, ale později. Otec, v dobré víře, že syna učí, připravuje hocha o radostný zážitek objevu. *Uměle zvětšuje rozsah chlapcových vědomostí, ale zpomaluje rozvoj jeho schopnosti věci objevovat. Navíc, a to je zásadní, otcovo počínání může deformovat Filipův styl učení se. Orientuje jej k přebírání hotových poznatků, a ne ke konstrukci poznatků vlastních.*

Žák, kterému jsou poznatky vnucovány, nebude v budoucnu ochoten ani schopen dopracovat se k nim vlastními silami.

5 **Příběh**
Pětiletá Františka počítá schované jahody

Pětiletá Františka ráda počítá, zejména s babičkou. Již několikrát sčítala 2 a 3 dohromady na bonbonech, panenkách, židlích ap. Pak jí babička dala náročnou úlohu: „Tady pod ubrouskem jsou dvě jahody a pod mojí rukou jsou tři jahody. Kolik je tady jahod dohromady?“ Dívka jahody neviděla. Chvíli na ubrousek i babiččinu ruku hleděla, pak k ubrousku dala dva prsty levé ruky a k babiččině ruce tři prsty pravé ruky a prsty spočítala. Radostně zvolala: „Pět.“ Babička ji velice pochválila. Františce zasvítila očka a řekla: „To pokaždé bude pět. Dvě a tři dohromady je pokaždé pět.“

Komentář k příběhu 5
Při práci s malými čísly si běžně pomáháme prsty. Je jedno, zda počítáme holuby na střeše nebo dny strávené na cestě. Prsty jsou tedy generickým nástrojem pro práci s malými čísly. Dívka ví, že dospělí používají prsty k počítání. Teď sama tento generický nástroj objevila. Předchozí součty 2* + 3* = 5* zde slouží jako izolované modely (IM), součet uskutečněný na prstech je generický model (GM). *Sjednocuje všechny předchozí součty 2* + 3* a je prototypem všech dalších podobných součtů.* Objevu předchází hluboký poznatek, že součet jakýchkoli objektů závisí pouze na číslech, nikoli na tom, co se počítá. Právě tento hluboký objev způsobil velikou radost dívky.

1.4.3 Motivace dítěte kriticky závisí na tom, jak jeho okolí rozumí jeho vývojovým potřebám

Příběhy ilustrují různé případy edukační interakce dospělý–dítě. Matka Cecílie z příběhu 3 a babička z příběhu 5 chápou a podporují poznávací potřebu dívek. Zážitek, který každá z těchto holčiček získala, zvyšuje jejich motivovanost jak k poznávání, tak k další komunikaci s osobou, která toto poznávání umožnila.

Otec z příběhu 2 potřebu dítěte ignoruje, ale činnost syna nebrzdí. Matka Anežka z příběhu 3 znemožní dceři nabývat těch zkušeností, o které dívka právě teď jeví zájem, ale nebrání jí získávat zkušenosti jiné. Nejhůře k vlastnímu potomkovi přistupuje otec z příběhu 4 a matka Blažena z příběhu 3. Nedovolí synovi/dceři nabývat vlastní zkušenosti. *Nutí jej/ji převzít hotový poznatek, reprodukovat a napodobovat, co předvede dospělý jako autorita. Oba to dělají v dobré víře, že tím urychlí poznávací proces dítěte.* Ve skutečnosti ale tlumí rozvoj jeho autonomie a potřebu poznávat, která je základem motivace. Vít Hejný přirovnával takového edukátora k zahradníkovi, který ve snaze o urychlení růstu květin je povytahuje každé ráno ze země. Poznamenejme, že prvními a nejvlivnějšími edukátory dítěte jsou jeho rodiče, resp. osoby, které jsou s ním v kontaktu od narození.

My dospělí si často neuvědomujeme tři specifika motivace dítěte: naléhavost, těkavost a velký rozsah motivačního spektra – pestrou paletu možných podnětů, které mohou dítě motivovat.

Naléhavost. Potřeba dítěte je naléhavá. Dítě chce například papír a nůžky a dožaduje se toho ihned, teď. Právě teď je jeho potřeba získávat nové manipulativní zkušenosti intenzivní. Za nějakou chvíli již tato připravenost odezní. Dospělý dokáže na realizaci svého motivačního impulzu čekat. Proto dospělý často považuje naléhavost potřeby dítěte za umíněnost, nebo dokonce drzost.

Těkavost. Motivační spektrum dítěte je těkavé. Dítě se zajímá o vše, co se ocitne v prostoru jeho pozornosti. Motivace dospělého člověka je selektivní. Zájmy dospělého jsou zaměřeny do několika málo oblastí. Uvedená rozdílnost mezi dítětem a dospělým způsobuje, že dospělý nerozumí vývojovým potřebám dítěte, a tedy ani tomu, jak dítě cíleně motivovat. Těkavost zájmů dítěte považuje za nežádoucí, protože interpretuje motivy a důsledky chování dítěte, jako by šlo o chování dospělého, a tak je znepokojen a nespokojen, protože „chaotická a nesystematická práce k ničemu nevede“.

Rozsah motivačního spektra dítěte je široký. Dítě si mapuje svůj vztah k jednotlivým oblastem lidské činnosti a získává zkušenosti, které mu jednou pomohou volit jeho povolání. Moudrý rodič na každou novou zálibu svého potomka hledí jako na jeho potenciální příští povolání. Pokud schopnosti rodičů nestačí dát dítěti relevantní zkušenosti, hledají rodiče vhodného člověka, který by dítěti pootevřel okno do světa jeho zájmu.

Výzva 2

Pokuste se popsat situaci z vlastního života, kdy jste byl(a) motivován(a) k nějaké poznávací činnosti, ne nutně matematické; popište i situaci, kdy jste k tomu byl(a) nucen(a).

Výzva 3

Popište situaci, kdy jste sledoval(a), jak je žák
a) motivován
b) demotivován.

O motivaci jsme mluvili, ale pojem sám jsme zatím nevymezili. *Kognitivní motivaci chápeme* (definujeme) jako potřebu poznávat, která pramení z rozporu mezi „nevím" a „chci znát", „neumím" a „chtěl bych umět", „nezkusil jsem" a „chtěl bych zkusit".

Výzva 4

O přilákání pozornosti žáka k matematice se učitel někdy snaží vložením matematické úlohy do **atraktivního** kontextu. Meziplanetární lety, záhady pyramid, podivuhodné jevy přírody, šifrování tajných zpráv apod. Jaké jsou vaše zkušenosti s tímto způsobem motivace?

Naše zkušenosti ukazují, že silnou **motivaci dává žákovi předchozí zážitek** úspěchu. **Motivace** pramení z radosti, která zavládne v mysli žáka, když úspěšně vyřeší *přiměřeně* náročnou úlohu. Tuto radost si přeje žák zažít znovu a znovu, takže se motivace stává trvalou. Slovo **přiměřeně** je důležité. Říká: Úloha musí být tak snadná, aby ji žák vyřešil, a zároveň tak náročná, aby měl z jejího zdolání radost. Příběhy 1 a 5 takovou motivaci ilustrují.

Izolovaný model (IM)

1.5

IM je konkrétní případ příští znalosti. Etapu izolovaných modelů rozdělíme na čtyři podetapy:

Ve vědomí se usadí první konkrétní zkušenost, první model – zárodek příštího poznatku.

Postupný příchod dalších a dalších izolovaných modelů, které zatím nejsou propojeny. Mohou se objevit i modely falešné a být zamítnuty modely správné.

Některé modely začnou na sebe navzájem poukazovat a shlukovat se do skupin a oddělovat od jiných. Vzniká předtucha, že tyto modely jsou v jistém smyslu „stejné".

Zjištění podstaty oné „stejnosti" vede k vytvoření společenství modelů.

Uvedené podetapy ilustrují následující příběhy:

6 **Příběh**[9]
Podélně rozkrojený rohlík

Mé dvě děti se dohadovaly, kdo snědl víc rohlíků. Ondra snědl celý rohlík, Šárka měla rohlík podélně rozkrojený a tvrdila, že snědla dva rohlíky. Ondra se hádal, že snědli oba dva stejně, tedy 1 rohlík, protože Šárka má dvě půlky. Šárka argumentovala, že toto nejsou dvě půlky, protože jsou stejně dlouhé jako celý rohlík; dvě půlky by to údajně byly tehdy, pokud by byl rohlík rozkrojen napříč.

Komentář k příběhu 6
Rohlík rozpůlený příčně je pro Šárku IM slova „polovina", ale rohlík rozkrojený podélně pro ni IM slova „polovina" není. Pojem „polovina" je u Šárky teprve v druhé etapě IM a příběh ilustruje zamítnutí správného modelu.

7 **Příběh**[10]
Koláček rozdělený na tři části

K svačině byly koláčky. Každému dítěti jsem koláček rozpůlila. Šestiletý Patrik řekl Milanovi: „To je polovina i to je polovina." Milan řekl: „To jsou dvě poloviny." Pak mne Patrik žádal, abych jednu jeho půlku koláčku ještě rozkrojila. Když jsem to udělala, hoch ukázal postupně na všechny tři kusy a třikrát opakoval: „To je třetina." Milan to udělal stejně. Já rozpůlila i druhou Patrikovu polovinu koláčku. Na každou čtvrtinu jsem ukázala a řekla: „To je čtvrtina." Oba hoši to opakovali. Chtěla jsem svým vysvětlením ukázat, že předchozí řeč o třetině byla chybná, ale nepovedlo se mi to. Řekla jsem si, že na to mají ještě kluci dost času.

Komentář k příběhu 7
Důležitý je zájem obou hochů o poznávání částí. Není běžné, že předškolák ví, co je třetina. Pro Patrika to byla každá část celku, který je rozdělen na tři části. Zatím si hoch neuvědomuje, že části musí být stejné, že dělení musí být spravedlivé, ale již jeho schopnost propojit slova „tři" a „třetina" svědčí o tvořivém uvažování dítěte. Pojem „třetina", který se teprve začíná ve vědomí hocha tvořit, ještě asi neobsahuje žádný jasně pochopený IM a ten, který se v příběhu objevil, je falešný. Učitelka si počínala rozumně. Nesnažila se chybnou představu Patrika korigovat – bylo by to předčasné. Ukázala jiný a správný model zlomku.

9
Autorka Marcela Sasková, kráceno, archiv autora.

10
Autorka Jana Hrinková, učitelka mateřské šoly, archiv autora.

11
Autorka Zdeňka Sýpalová, kráceno, archiv autora.

8 Příběh
Janka spočítá rohlíčky, až se upečou

Pětiletá Janka peče s maminkou vánoční cukroví. Na plech klade své rohlíčky a počítá: „Jeden, dva, tři, čtyři, pět. Pět. Udělala jsem pět rohlíčků." Upečený plech donese maminka na balkon a připravuje druhý plech. Janka opět klade své rohlíčky. Tentokráte sedm. Maminka chválí dcerku a říká: „Na balkoně je pět tvých rohlíčků, teď v troubě je jich sedm. Kde jich máš více?" Janka po chvilce uvažování odpoví: „Řeknu ti to, až se upečou."

Komentář k příběhu 8

Pro Janku jsou čísla služebníky věcí, nemají ještě samostatnou existenci. Janka má představu o tom, co je „pět rohlíčků", ale zatím neví, že při počítání rohlíčků může použít například prsty. Číslo zjišťuje prostřednictvím říkanky – slov, která jdou za sebou v přesném pořadí – a má ho vázáno na daný IM. Ještě neví, že porovnat „pět rohlíčků" a „sedm rohlíčků" lze udělat pomocí prstů. Prsty jsou jiný IM a dívka ještě neví, že tyto IM se mohou zastupovat. Poznatek Janky je na úrovni druhé podetapy IM.

9 Příběh[11]
Teta si dělá legraci

Šestiletá dcera mé sousedky ráda počítá. Je velice bystrá. Ráda se učí, ale ještě nechodí do školy; je narozena v září. Když jsem jí dala sečíst čtyři čísla, řekla: „To je pro děti ze školičky, já chci nějakej těžšejší, teto!" Napsala jsem jí tedy součet sedmi čísel. Asi za 15 minut přišla se správným výsledkem. Dala jsem jí znovu stejná čísla v jiném pořadí. Opět přišla se správným výsledkem asi po 15 minutách, ale se slovy: „To je divný, vyšlo to stejně!" Čísla jsem jí tedy opět proházela a zadala „novou" úlohu. Tentokrát přišla asi po 10 minutách, úplně nadšená a volala, že jsem kouzelník, že to vyšlo zase stejně. Po čtvrtém zadání (třetím prohození čísel) přišla za dvě minuty a povídá. „Teto, ty si ze mě děláš nějakou legraci. Ty čísla jsou přece pořád stejný, jsem to měla vypočítaný hned!"

Komentář k příběhu 9

První výpočet dívenky byl prvním IM dané situace. Druhý výpočet byl spojen s evidencí stejnosti výsledků obou IM. Dívenka je na prahu třetí podetapy IM. U čtvrté úlohy odhalí příčinu shodnosti tří výsledků. Tím dosáhne čtvrté podetapy IM. Když pak svůj objev zformuluje, bude to její GM poznatku, který vyjadřujeme slovy „sčítání je komutativní".

Výzva 5

Pokuste se popsat vaše vlastní izolované modely pojmu:
a) pětina
b) dvě pětiny
c) tři poloviny.

Generický model (GM)

1.6

1.6.1 Objev generického modelu

GM vzniká AHA-efektem z komunity IM. Je jádrem skutečného poznání. Když chci zjistit, do jaké míry žák ovládá nějaký pojem, vztah, operaci, proces nebo situaci, zjišťuji počet a kvalitu jeho GM příslušného poznatku. V příběhu 1 jsme viděli dokonce tři generické modely vztahu $s = 2r + 2$. První dva z dílny Petra a Pavla byly procesuální GM (1) a (2). Třetí, Pepíkův (součet středových čísel je dvakrát rohové číslo plus dvě), byl konceptuální GM (3).

V příběhu 5 Františka objevila prsty jako generický nástroj pro počítání s malým počtem prvků.

V příběhu 9 se dívenka dostala až na práh objevu GM „sčítání je komutativní".

10 **Příběh**
Věta o obvodovém úhlu

Bylo mi asi 13–14 let a přitahovaly mne konstrukce trojúhelníka. S úlohou $\Delta\,(a, \alpha, v_a)$ jsem bojoval několik dnů. Narýsoval jsem úsečku BC délky a rovnoběžně s ní ve vzdálenosti v_a přímku p. Na ní jsem hledal bod A tak, aby úhel BAC měl velikost α. To se mi nedařilo. Pak mne napadlo sestrojit několik bodů $A_1, A_2, A_3, \ldots$ tak, aby $|\sphericalangle BA_iC| = \alpha$. Body A_i neležely na přímce, ale vypadalo to, jako kdyby ležely na kružnici. První obrázek to plně nepotvrdil, bylo nutno rýsovat přesněji. Udělal jsem ještě dva další obrázky a na nich se zdála moje hypotéza být potvrzena. Běžel jsem za otcem ukázat mu konstrukci trojúhelníka $\Delta\,(a, \alpha, v_a)$. Více poučení o GM v oblasti geometrie najde čtenář v publikaci Jirotková (2010).

Výzva 6

Pokuste se realizovat dosud popsaný postup řešitele, dokončit jej a postup konstrukce zapsat.

Komentář k příběhu 10

Díky hledání a nalezení konstrukce zadaného trojúhelníka jsem objevil GM věty o obvodovém úhlu. Tvrzení, formulované jako návod ke konstrukci, bylo určitě neúplné. Moje přesvědčení o tomto tvrzení bylo opřeno pouze o dva obrázky. Uvedený objev je příklad GM, u něhož nemá smysl mluvit o úrovni procesuální a úrovni konceptuální.

V poznávacím procesu hraje GM roli pivota (středobodu[12]). Směrem *dolů* sjednocuje komunitu IM (to jsou obvodové úhly příslušné témuž oblouku nebo vrcholy trojúhelníků, při nichž je týž úhel α a jejichž protilehlá strana je tětivou kružnice, na níž tyto vrcholy leží) a je prototypem každého jedince této komunity (konstrukce v sobě obsahuje každý jednotlivý izolovaný model trojúhelníka se zadaným úhlem); směrem *nahoru* je východiskem k vytvoření abstraktního poznatku (všechny obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou shodné). Tím ale působnost GM nekončí.

12
Středobod je počeštěný slovenský stredobod – centrum pozornosti, dění; bod otáčení. V češtině mu je, resp. byl, nejbližší historický termín úhelný kámen.

13
Tětivou, kterou vymezuje půlkruh na kružnici, je průměr. Thaletova věta zní: „Všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé."

14
Viz 1.2 – Izolovaný model a generický model.

1.6.2 GM se mění na IM

Tím, že se GM mění na IM, otevírá cestu k objevu nového GM vyšší úrovně. Ve výše uvedeném příběhu věta o shodných obvodových úhlech příslušných témuž oblouku platí pro libovolný oblouk určený touto tětivou, přičemž speciálním případem, který nás dovede k Thaletově větě[13], je půlkruh. Také generický model, jímž je součet uskutečněný na prstech v příběhu 5, *sjednocuje všechny předchozí součty 2* + 3* a je prototypem všech dalších podobných součtů.*

Výzva 7

Zkuste popsat vlastní generické modely vztahu rovnoběžnosti a vztahu dělitelnosti.

Transformaci GM na IM ilustrujeme na tvrzení (3)[14] „Ten součet, to je dvakrát to číslo v rohu, plus dvě." (Pepův objev.) Když žáci najdou GM (3) jako návod na řešení násobilkového čtverce z obrázku 3a, dostanou k řešení násobilkový čtverec z obrázku 3b. I zde najdou GM. Pak dostanou k řešení čtverec z obrázku 3c a opět najdou GM.

Zapíšeme-li tyto tři GM pod sebe, dostaneme:

Pro čtverec z obrázku 3a platí:
součet s je dvojnásobek čísla $(r + 1)$, $s = 2(r + 1)$

Pro čtverec z obrázku 3b platí:
součet s je dvojnásobek čísla $(r + 2)$, $s = 2(r + 2)$

Pro čtverec z obrázku 3c platí:
součet s je dvojnásobek čísla $(r + 3)$, $s = 2(r + 3)$

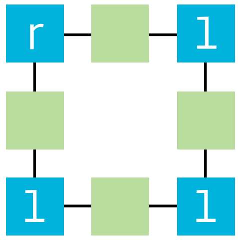
Z těchto výsledků, které teď chápeme jako izolované modely, dostáváme vyšší GM:

Pro čtverec z obrázku 3d platí:
součet s je dvojnásobkem čísla $(r + n)$, $s = 2(r + n)$.

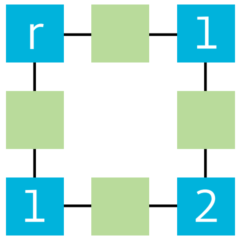
Výzva 8

Vyřešte čtverce na obrázcích 3e, 3f a 3g a z nich, coby izolovaných modelů, objevte řešení čtverce z obrázku 3h. To je nový, vyšší GM.

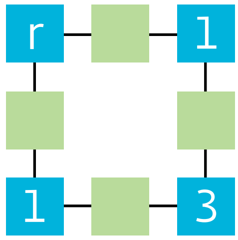
Obr. 3a



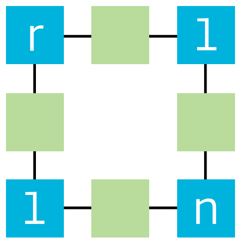
Obr. 3b



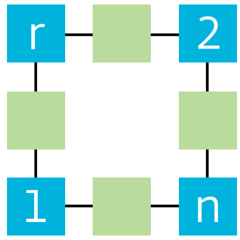
Obr. 3c



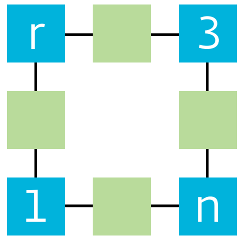
Obr. 3d



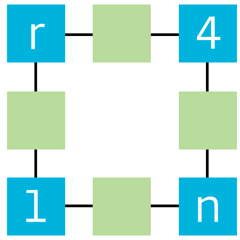
Obr. 3e



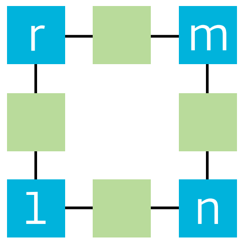
Obr. 3f



Obr. 3g



Obr. 3h



Abstraktní poznatek

1.7

Abstraktní poznatek vzniká procesem odloučení[15], tj. abstrahování jádra poznatku od konkrétních podmínek, při nichž k poznatku došlo a v nichž je poznatek zpočátku uložen. *Charakteristickým rysem abstraktního poznatku je změna jazyka (například místo dvou čárek se objeví číslice 2).* Pojem „dvě" je nejprve vázán na konkrétní sémantickou zkušenost[16] (dvě jablíčka je něco jiného než dvě panenky a to je něco jiného než dvě ruce). Z těchto IM vzniká GM „dva prsty", nebo | |. Z něj se pak abstrakcí rodí pojem „dvě" zapsaný *znakem* 2. Podobně různé IM vztahu 2* + 3* = 5* vytvoří nejprve GM | | + | | | = | | | | | a ten pak přechází do abstraktního poznatku zapsaného 2 + 3 = 5. Podobně pojem „polovina" je zapsán jako $\frac{1}{2}$, resp. 0,5, resp. 50 %. Podobně je později zapsán vztah komutativity $a + b = b + a$.

Klíčové pro proces abstrakce je to, zda nový jazyk přichází jako nové jméno pro již existující poznatek, nebo jako nositel nového poznatku. Pokud nový jazyk přichází jen jako nové jméno pro to, co již ve vědomí existuje, pak nový jazyk organicky napomáhá posouvat existující GM na úroveň abstraktního poznatku. Není-li tomu tak, pak nový jazyk je pouze nástrojem komunikace, často pro žáka bezobsažným. Žák, který již dobře umí počítat do 20, ale dosud nezná číslice, je poučen, že čísla budeme psát pomocí znaků 1, 2, 3... Tím se jeho znalost malé aritmetiky začíná zvedat na úroveň abstraktní znalosti.

Jestliže se ovšem znaky pro číslice a celý systém zavedou příliš brzy, dříve, než byly pro číslo vytvořeny generické modely, nejedná se o abstraktní znalost, ale pouze o komunikační nástroj. Pokud je tento nástroj doplňováním o další poučky udržován jako protetická znalost, pak je to znalost formální. Je to pouze protéza skutečné znalosti, i když žák bezpečně odříká pravidla a správně pomocí nich vyřeší standardní úlohy. Na nestandardních úlohách, například na algebrogramech typu AB + B = 24, ztroskotá. Když jsou ale později abstraktní znaky číslic zživotňovány běžnou každodenní zkušeností, kupříkladu nakupováním, pak se tato znalost stává znalostí neformální. Proto převážná většina dospělých spoluobčanů s přirozenými čísly potíže nemá ani v případě, kdy byl vstup do povinného vzdělávání poznamenán formalismem a následně blokem vůči matematice. Neplatí to již ale o zlomcích a číslech záporných, se kterými se v běžném životě setkáváme podstatně řidčeji a pro něž byla rovněž budována „znalost" protetická, případně byla tato „znalost" budována v době, kdy znaky pro čísla byly pouze komunikačním nástrojem.

K porozumění zlomkům vedou čtyři GM: počet (třetina z 6* jsou 2*), úsečka (třetina hole je tyčka, která se délkou do hole vejde přesně třikrát), obdélník (třetina čokolády o rozměrech 4×6 je osm □), kruh (výsostný znak Česka je kruh rozdělený na tři třetiny).

K porozumění záporným číslům vede prostředí krokování a později i prostředí schodů.

15
Záměrně je zde použito odloučení, nikoli oddělení, neboť po odloučení začíná nový objekt žít svým vlastním životem. (Vít Hejný, archiv autora)

16
Zkušenost s konkrétním obsahem, významem.

17
Kognitivní posuny označené na obr. 2 na str. 17 šipkami 1 a 2 nazýváme zdvihy. Zdvih 1 je zobecněním, zdvih 2 je abstrakcí.

Krystalizace

Krystalizací rozumíme proces postupného zdomácnění nového poznatku ve vědomí žáka. Tento proces začíná již při práci s izolovanými modely.[17] Když žák objeví, že 10 + 20 = 30 je vlastně totéž co 1 + 2 = 3, když tedy objeví generický model pro počítání v desítkách, pozvedne tím i svoje porozumění pro GM vztahu 1 + 2 = 3, který vzešel z IM $1^* + 2^* = 3^*$. Vidí totiž, že za * zde lze vzít nejen věci jako autíčko, panenku nebo prst, ale i čísla jako desítku, později stovku, tisícovku, ale i, řekněme, číslo 7. To připraví poznatek distributivního zákona, jehož izolovaným modelem je například vztah 7. (1 + 2) = 7.1 + 7.2.

Když již žák ovládá zlomky a učí se desetinná čísla, zjišťuje, že $0{,}5 = \frac{1}{2}$ a $0{,}25 = \frac{1}{4}$. Tím se desetinná čísla propojují se zlomky, a to zatím na úrovni izolovaných modelů. Když pak žák objeví, že desetinné číslo rovné zlomku $\frac{3}{8}$ získáme vydělením $3 \div 8 = 0{,}125$, dostává se ke generickému modelu převodu zlomků na desetinná čísla. Zde ale zlomek $\frac{1}{3}$ dá nejasné číslo 0,33333..., které se vlastně nedá zapsat. Ještě horší to je s číslem $\frac{1}{7} = 0{,}14285714285714...$ Objevují se periodická desetinná čísla jako nový typ čísel, jejichž zápis by žádal nekonečně mnoho číslic.

Propojení desetinných čísel se zlomky, které jsou žákovi již známé, vede k objevování nových objektů a nových vztahů. Je to krystalizace, která je zdrojem série nových izolovaných i generických modelů a která bude probíhat po celou dobu až do maturity. Abstraktním poznáním, kterým tento proces končí, je schéma racionálního čísla, které lze zapsat jak desetinným periodickým číslem, tak zlomkem. Toto poznání obsahuje poznatek o přepisu desetinného čísla na zlomek, a naopak i poznatek o existenci čísel reálných, která nejsou racionální.

Proces a koncept

1.9

V sekci 1.2 – Izolovaný model a generický model – jsme se setkali s termínem procesuální a konceptuální generický model. **Procesuálním** generickým modelem byl návod, jak postupně dojít k výsledku (v příběhu 1 to byla slova Petra a Pavla „jde to po dvou“, „jde to po deseti“). **Konceptuálním** generickým modelem je slovně vyjádřený vzorec, který umožňuje najít výsledek ihned, dosazením (slova Pepy „Ten součet, to je dvakrát to číslo v rohu, plus dvě“). Nyní si pojmy proces a koncept ještě trochu přiblížíme.

Hudbu vnímáme jako proces, obraz jako koncept. Písničku neumíme zpívat pozpátku, ale když se díváme na obraz, mohou naše oči těkat z jednoho místa na jiné tak, jak se nám chce. Na rozdíl od melodie, kterou posloucháme postupně tak, jak se odvíjí, si obraz neprohlížíme postupně zleva doprava a shora dolů; můžeme ho dokonce vidět celý najednou. Když u objevu dětí slyšíme komentář či vysvětlení slovy „já to vidím“, je to důvod k velké vnitřní radosti – pravděpodobně jsme u zrodu konceptu. Vazba mezi procesem a konceptem zasahuje i do matematického myšlení.

11 **Příběh**
Čtyřletý Prokop se naučil říkanku „jedna, dvě…“ do šesti

Na stole jsou 4 talíře a babička se ptá Prokopa, kolik je na stole talířů. Hoch je počítá: „Jeden, dva, tři, čtyři.“ Babička opakuje dotaz a hoch opakuje počítání. Po dvou měsících ve stejné situaci hoch odpoví: „Jeden, dva, tři, čtyři, čtyři jsou.“

Komentář k příběhu 11
Nejprve na otázku „kolik?“ hoch předvedl proces počítání. Později pochopil, že počítání není samoúčelné, že vede k výsledku, ke konceptu. Slovo „čtyři“ řekl dvakrát. Poprvé to bylo *závěrečné slovo* říkanky, procesu. Podruhé to byl *výsledek* procesu, koncept. Mnoho pojmů, konceptů matematiky, se do vědomí žáka dostává cestou procesu, zejména u aritmetiky. U geometrie to může být i obráceně. Žák má představu čtverce, a když jej žádám, aby z dřívek vymodeloval čtverec, chci po něm, aby koncept vytvořil procesem.

Podívejme se na jiný případ přechodu od procesu ke konceptu.

12 **Příběh**[18]
Šestiletá Edita objevila trojmístná čísla

Šestiletá Edita dobře sčítá a odčítá do 20 a zná čísla do 99. Pozná i číslo 224 – číslo máminy kanceláře. Při poznávání čísel nad dvacet byl pro ni důležitý objev čísla 21. Udělala jej, když pochopila, že 21 Kč je 20 Kč a 1 Kč. Dnes pomocí stejného modelu objevila trojmístná čísla. Otec musel opakovaně vybrat dvacetikorunovou a stokorunovou bankovku, aby se Edita na ně podívala. Z dvou slov „sto“ a „dvacet“ se v jednom okamžiku stalo slovo „sto-dvacet“ a vzápětí „sto dvacet“. Pak ještě k tomu Edita přidala jednu korunu a radostně zvolala: „To je dvacet jedna korun a to je <u>sto</u> dvacet jedna korun…“ – a prstíkem ukazovala postupně na stokorunu, dvacetikorunu a korunu.

18
Viz HEJNÝ, Milan – KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, s. 107.

19
Edita si uvědomila, jak přišla na pojem 21 a spojuje to s objevem 120. Přemýšlí o tom, jak přemýšlí. To je metakognice.

Komentář k příběhu 12

Objev Edity lze rozložit do tří etap.

1. Dívka opakovaně přikládá ke stokorunové bankovce dvacetikorunovou, aby viděla, jak čísla vytvářejí číslo 120. Čísla 100 a 20 jsou na bankovkách napsána, číslo 120 napsáno není.

2. Pak v AHA-okamžiku poznání opakovaným procesem vznikne ve vědomí Edity nový koncept, číslo 120.

3. Téměř současně přichází další AHA-okamžik, který propojí tento objev s dřívějším objevem pojmu 21 a dochází k zřetězení objevů 20 + 1 → dvacet-jedna a 100 + 20 → sto-dvacet do jediného objevu 100 + 20 + 1 → sto-dvacet-jedna. Porovnání čísel 120 i 121 představuje první hlubší vhled dívky do trojmístných čísel a poziční soustavy vůbec.

Představa čísla 120 ve vědomí dívky není opřena o znak 120, ale jen o slovo sto-dvacet. Objev znakového zápisu čísla bude tedy další etapou poznávání pojmu „sto-dvacet". Až pak bude dívka schopna pochopit, že číslo 224 maminčiny kanceláře není jen jméno místnosti.

Klíčová na objevu je samostatnost dívky při jeho vzniku. Rodiče do poznávání dívky nezasahovali a trpělivě pomáhali objevu na svět. Veliká radost dívky je důsledkem této její samostatnosti a nezávislosti.

Okamžité propojení objevu čísla 120 s předchozím objevem čísla 21 ukazuje, že:

1. nový poznatek, který přichází do poznatkové struktury člověka, má tendenci krystalizace, tj. propojení na dřívější poznatky;

2. postup, kterým dívka objevila pojem 121, byl převzat z dřívějšího objevu pojmu 21 a 120. Tato cesta objevu náleží do metakognice.[19]

Procept

1.10

V příběhu 11 (v němž Prokop zpočátku chápe otázku na počet talířů jako výzvu k počítání) jsme viděli, jak se opakovaným procesem vytváří koncept. Tento postup zkoumalo mnoho didaktiků. Poslední významný objev v tomto bádání uskutečnili v roce 1994 D. Tall a E. Gray, když popsali poznávací proces trojicí

Proces → Koncept → Procept

Termín *procept* zavedli jako amalgám[20] anglických slov PRO-ces a con-CEPT. *Procept* je poznatek, který v sobě zahrnuje tři složky: *proces*, *koncept a znak* (*symbol*).

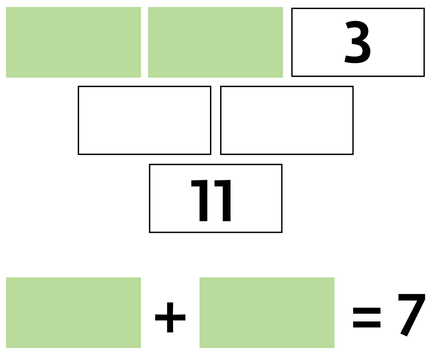
Edita ještě nemá pojem sto-dvacet-jedna na úrovni proceptu, protože ještě k němu nemá znak. Až porozumí znaku 121, bude tento její procept vytvořen. Sama si řekne, kdy u ní vznikne potřeba tento krok udělat.

Dítě, které již má číslo 5 na úrovni proceptu, dokáže počítat pozpátku „pět, čtyři…, jedna“, ví, že 5 = 4 + 1, dokáže řešit úlohu 3 + ? = 5 dopočítáváním (ke třem prstům na levé ruce dopočítá „čtyři, pět“ na prstech pravé ruky; pak se podívá na pravou ruku a řekne „dva“). Pozorujeme-li dítě, které má již vytvořen procept čísla, jen zřídka umíme říct, kdy pracuje s procesem a kdy s konceptem.

20
Amalgám je slitina rtuti s jedním nebo několika kovy. Tuto metaforu použili D. Tall a E. Gray při popisu vzniku proceptu. Viz GRAY, Eddie M. – TALL, David O. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1994, 25(2), s. 116–141.

1.11 Aritmetické znalosti žáků trpí nedostatkem konceptů

Obr. 4



Aritmetika, tak jak se učí od první třídy ZŠ až po maturitu, zdůrazňuje řešitelské procesy (děti se učí postupy, návody) a zanedbává rozvoj konceptuálních přístupů k problémům, mimo jiné i důrazem na rychlost. V důsledku toho pak žák není schopen *vidět* problém jako celek, ale jen jako výzvu k počítání. Vzpomeňme na analogii obrazu prohlíženého postupně po částech v přesném pořadí; učit se postupy je podobně absurdní. Kdybychom zadali postup, jak prohlížet obraz, také nemůžeme očekávat, že z takového řízeného pozorování vzniknou kladné emoce. Nedostatek konceptuálních přístupů ilustruje následující příběh.

13 Příběh
Blanka řeší součtový trojúhelník s podmínkou

V druhém ročníku ZŠ řešila Blanka součtový trojúhelník na obrázku 4. Blanka jako v podobných jiných případech i zde použila metodu pokus–omyl. Podívala se na zadanou podmínku – součet zelených políček je 7 – a do vybarvených polí postupně vložila dvojici čísel (3,4), (2,5), (5,2) a (6,1). Poslední pokus byl úspěšný. Blanka se chvíli dívala na všechny čtyři trojúhelníky a všimla si, že ve všech je pod vybarvenými poli číslo 7. Běžela objev ukázat učitelce.

Ta řekla: „No jistě, vždyť to tady máš napsané!“ – a ukázala na poslední řádek zadání. Když mi o tom učitelka vypravovala, dodala: „Jak jsem ta slova řekla, hned jsem toho litovala. Měla jsem Blanku nechat vyložit svůj objev třídě.“

Komentář k příběhu 13

Sebekritika učitelky je užitečná. Zvyšuje naději, že tuto chybu již nebude opakovat. Nás ale více zajímá to, proč Blanka ihned neviděla, že číslo 7 lze vložit do příslušného pole. Zřejmě proto, že Blanka se na úlohu dívá procesuálně. V její mysli je otázka: „Jak to budu hledat?“ Odpověď na ni je „metodou pokus-omyl“. Kdyby se na celou situaci Blanka podívala jako na koncept, viděla by asi, že součet čísel vybarvených polí je zde 2krát. Přitom jednou je dán. Stačí tedy dané číslo 7 přesunout do trojúhelníku. Jenže Blanka se na trojúhelník jako na koncept nepodívala. Proč? Jak řešit popsaný didaktický problém? Jak do vyučování vložit více konceptuálních aktivit? Tomu je věnován následující text.

Aditivní triáda – výchozí schéma aritmetiky

1.12

Aritmetický svět se dítěti otevírá přes operace sčítání a odčítání, tedy přes vztahy $a + b = c$ a $a - b = c$. Úlohu 2 + 3 = ? řeší žák třeba pomocí prstů. Zjistí, že 2 + 3 = 5 a výsledek zapíše. Řešení bylo provedeno procesem, výsledek i zápis 2 + 3 = 5 jsou koncepty. Ve vědomí žáka je nejprve proces, pak koncept. Zřídka se zde objeví proces s konceptem najednou, neboť po nalezení čísla 5 reprezentanti čísel 2 a 3 zanikají. Když ale náhodou i po výpočtu zůstane ve vědomí žáka celá trojice (2, 3, 5), pak budeme mluvit o *interní aditivní triádě*.

Pojem aditivní triády zavedli P. Černek a V. Repáš pod názvem sčítací (odčítací) rodinka v učebnici Repáš a kol.2 (1997)[21]. Úspěšně tím vedli žáky k poznání úzké vazby mezi operací sčítání a operací odčítání. Jako nástroj didaktického výzkumu triádu použila J. Slezáková-Kratochvílová (2004)[22].

Termínem *externí aditivní triáda* rozumíme napsanou trojici čísel *(a, b, c)*, z nichž jedno je součtem dalších dvou. Mentální projekci tohoto objektu do vědomí člověka pak nazveme interní aditivní triáda. Přitom nespecifikujeme, které z čísel je součtem zbylých dvou, a nespecifikujeme ani příslušný číselný obor. Ten je určen věkem žáků, jejichž myšlenkové procesy analyzujeme. V našem případě jde zejména o žáky prvního a druhého ročníku. Zde tedy číslem rozumíme malé přirozené číslo.

Interní aditivní triáda je nástrojem, pomocí něhož lze účinně rozvíjet schopnost žáka vnímat aritmetické situace konceptuálně. Vzniká otázka, jak toho lze v praxi docílit. Zřejmě pomocí úloh, ve kterých nestačí sčítat a odčítat, kde je třeba pracovat s celou triádou jako s myšlenkovou jednotkou.

Již na začátku první třídy, ještě dříve, než jsou zavedeny číslice, žák řeší úlohy, jako je ta, která je již vyřešena na obrázku 5 (viz F1/1;18) [23]. Obrázek, na kterém jsou přítomna všechna tři čísla externí triády (2,3,5), vizualizuje součet 2 + 3 = 5. Když v obrázku zakryjeme horní levý čtverec, vznikne úloha 5 – 3 = ... Když zakryjeme horní pravý čtverec, vznikne úloha 5 – 2 = ... Žák, který najednou uchopí celou trojici uvedených úloh, si buduje interní triádu (2,3,5).

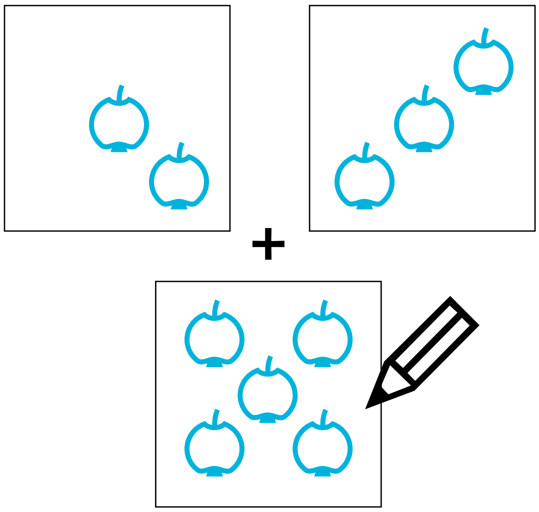
Ještě hlouběji triádu žák uchopí, když bude řešit úlohu, ve které nepůjde o sčítání nebo odčítání, ale o práci s celou triádou. Příkladem takové úlohy je úloha 1.

Úloha 1

Známe dvě ze tří čísel v součtovém trojúhelníku. Jsou to 3 a 4. Třetí číslo neznáme. Najdi tento trojúhelník. Najdi všechna řešení.

První dvě řešení, která žáka napadnou, mají v horní řádce dvojici | 3 | 4 |, nebo | 4 | 3 |. Další řešení žák získá, když číslo 4 umístí do dolního pole. V horní řádce pak bude | 1 | 3 |, nebo | 3 | 1 |.

Obr. 5



21
REPÁŠ, Vladimír – et al. *Matematika pre 5. ročník základných škol: prirodzené čísla*. 1. vyd. Bratislava: Orbis pictus istropolitana, 1997. 64 s.

22
SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. Triády jako prostředí výzkumu a výuky. In: HEJNÝ, Milan – NOVOTNÁ, Jarmila – VONDROVÁ, Naďa (eds.). Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky 2. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2004, s. 409–420.

23
HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika: pro 1. ročník základní školy* 1, op. cit., s. 18.

Případ, že dolní číslo je 3, vede k záporným číslům a žák, který by něco podobného odhalil v druhém ročníku, by byl již na hranici geniality.

Výsledkem úlohy 1 tedy není číslo, ale čtyři triády. Sčítání nebo odčítání jsou jen pomocné akce, hlavní pozornost řešitele je zaměřena na rozložení čísel 3 a 4 v trojúhelníku, tedy na triádu. Podobné úlohy lze tvořit i v jiných prostředích, například v prostředí Sousedé (viz kapitolu 3.3.5). Triády jsou aktuální i pro starší žáky. Tak žákům druhého stupně můžeme adresovat tuto náročnou úlohu:

Úloha 2

Trojice 1, 2, 3 tvoří jednu aditivní triádu, neboť 1 + 2 = 3. Dokažte, že šestici 1, 2, 3, 4, 5, 6 nelze rozdělit na dvě aditivní triády. Zjistěte, zda devítici 1, 2, ..., 9 lze rozdělit na tři aditivní triády i zda dvanáctici 1, 2, ...12 lze rozdělit na čtyři aditivní triády. Hledejte přirozená čísla $n > 1$, pro která je možné rozdělit 3n-tici čísel 1, 2, 3, ..., $3n$ do n aditivních triád.

[Nejmenší takové $n > 1$, pro které to možné je, je 4. Tedy dvanáctici 1, 2, ... 12 lze rozdělit na čtyři aditivní triády. Řešení: (2, 10, 12), (3, 8, 11), (4, 5, 9), (1, 6, 7) nebo (2, 10, 12), (5, 6, 11), (1, 8, 9), (3, 4, 7).]

Ukončili jsme úvahy o poznávacím procesu žáka. Jestliže jsme na četných příbězích ukázali, že poznávací proces je radostný, pak tím chceme zdůraznit, že autonomní poznávání mladého člověka je pocitem radosti provázeno.

Poznámka k automatizaci početních spojů

1.13

Automatizace početních spojů operací sčítání, odčítání a zejména násobení není etapou poznávacího procesu. To je proces nácvikový, jehož přínos pro rozvoj matematického orgánu žáka je silně diskutabilní. V mnoha oblastech lidské činnosti je automatizace důležitá a její nedostatek až limitující. Řidič auta musí mít práci se spojkou, plynem a brzdou zcela automatizovánu, aby se mohl věnovat tomu, co se děje na silnici. Klavírista musí mít automatizováno čtení not, aby mohl hrát hudební myšlenky. Člověk, který nemá automatizované čtení, je v běžném životě silně znevýhodněn. Ve všech uvedených a spoustě neuvedených příkladů je automatizace činnosti nutná. Nikoli však v matematice. Řešením zajímavých úloh, u nichž je potřebné počítání, bude žák početní spoje postupně nenásilně automatizovat v duchu Komenského „Omnia sponte fluant absit violentia rebus“[24].

24
Všechno ať samo plyne, ať ve věcech násilnost není. (KOMENSKÝ, Jan Amos. *Obecná porada o nápravě věcí lidských*. 1. vyd. Praha: Svoboda, 1992, titulní list.)

Formální poznatek

2

Úvod: znalost skutečná a znalost zdánlivá

2.1

Poznatek, který žák umí odříkat, ale kterému nerozumí, nazýváme poznatkem formálním. Sabina (pátý ročník) přesně odříká poučku

„Trojúhelník, který má jeden úhel tupý, se nazývá tupoúhlý“,

ale o konkrétním trojúhelníku nakresleném na tabuli nedovede rozhodnout, zda je, nebo není tupoúhlý. Profesor Kössler[25] takovou „znalost“ nazýval pojmenovaná nevědomost.

Termín „formální poznatek“ nebo „formální znalost“ je problematický, protože se zde o poznatek nebo znalost nejedná. Je to pouze protéza poznatku. Výstižná jsou anglická označení rote[26] knowledge, parrot-like knowledge, mechanical knowledge.

Skutečnost, že značná část matematických znalostí našich žáků, ale i dospělých občanů, je zatížena formalismem, považujeme za druhý nejzávažnější nedostatek vyučování matematice (nejen) v základní škole. Tím prvním nedostatkem je negativní vztah většiny žáků k matematice. Pro mnohé žáky hodiny matematiky nejsou hodinami radosti z objevování a poznávání, ale hodinami nudy nebo strachu.

V této kapitole budeme zkoumat formalismus jako nemoc matematického duševního orgánu. Současně budeme hledat ty činnosti učitele, které nemoc formalismu způsobují nebo podporují.

V podkapitole 2.2 nejprve popíšeme duševní orgán – klíčový pojem kinetické psychologie Víta Hejného. Nás bude zajímat matematický duševní orgán odpovědný za matematické chování jedince. Teoretický text může čtenář přeskočit, protože pro intuitivní porozumění práce matematického duševního orgánu postačí bohaté ilustrace a analýza příběhů.

V podkapitole 2.3 zaměříme pozornost na odlišnost procesů učení se čtení a psaní na jedné straně a na učení se počítání na straně druhé. Pomocí kybernetických schémat ukážeme, v čem se tyto procesy zásadně liší a proč i vyučování obou předmětů vyžaduje odlišnou edukační strategii.

Kybernetické schéma vytvořené v podkapitole 2.4 s cílem popsat proces učení se počítání nám umožní porozumět příčině případné žákovy chyby. Ukážeme též jednoduchou a spolehlivou diagnostickou techniku, jak může učitel lokalitu chyby určit a účinně žákovi nabídnout reedukační postup.

Dva příběhy v podkapitole 2.5 ukážou dvě různé řešitelské strategie úlohy 2 + 7 = _. Chlapec řeší úlohu pomocí knoflíků, udělá chybu, pracuje pilně a dlouho. Dívka ihned řekne správný výsledek, protože jej zná zpaměti.

Podkapitoly 2.6 až 2.9 zkoumají jádro problému formalismu. Odhalují ty postupy učitele, které nemoc formalismu způsobují a podporují.

Podkapitoly 2.10 a 2.11 ukazují, jak vypadá chronické stadium vývoje nemoci, ale také, jak lze i v tomto stadiu nemoc léčit a komplex méněcennosti prolomit.

25
Miloš Kössler (1884–1961), český matematik, autor učebnic i původních vědeckých statí; v letech 1939–1943 předseda Jednoty českých matematiků a fyziků. Specializoval se na teorii analytických funkcí a teorii čísel.

26
By rote ≈ bezmyšlenkovitě zpaměti, learn by rote ≈ nadřít, navrčet, našprtat; parrot-like knowledge – papouškování, mechanical knowledge – mechanické zapamatování.

27
Viz BACHRATÝ, Hynek (ed.). *Archív Víta Hejného I* [pracovné materiály TMM, výchova prací, kinetická psychológia, psychológia pre pedagóga v teréne]. 1. vyd. Žilina: EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2012, s. 49

28
HEJNÝ, Vít – HEJNÝ, Milan. Pracovné materiály školiaceho pracoviska tábora mladých matematikov. Banská Bystrica, Krajský pedagogický ústav [1977]. In: BACHRATÝ, Hynek (ed.). *Archív Víta Hejného I*, op. cit., s. 42–43.

Matematický duševní orgán

2.2

Matematický duševní orgán je myšlenkový konstrukt vytvořený metaforickým přirovnáním učitele k lékaři. Termínem matematický duševní orgán rozumíme tu část vědomí člověka, ve které probíhají matematické kognitivní činnosti člověka. Slovo „duševní" budeme vypouštět.

Metafora *učitel-lékař* pomáhá měnit tradiční pohled na vyučování matematice. V tradičním pojetí je neznalost či formální znalost žáka chápána jako důsledek jeho malé píle nebo nedostatku nadání. V nové terminologii mluvíme o nerozvinutém nebo o nemocném matematickém orgánu[27]. V tradičním přístupu se učitel snaží učivo žákovi vysvětlovat a apelovat na jeho úsilí. V novém přístupu se učitel snaží zjistit příčiny neduhů žákova matematického orgánu, pak hledat cesty léčení.

Myšlenka duševního orgánu pochází od Víta Hejného; je rozpracována a užita v několika jeho studiích. Duševní orgán odpovědný za matematické chování jedince Vít Hejný popsal před půlstoletím jako „orgán vztahově-abstraktní činnosti". My budeme mluvit o matematickém orgánu. Citujeme z práce V. Hejný a M. Hejný (1977):

„Každá duševná činnosť je nejako psychikou administrovaná. Centrum poverené touto administráciou nazveme duševným orgánom. Tak budeme hovoriť o duševnom orgáne pracovnom, študijnom, komunikačnom a ďalších. Nakoľko pojem duševného orgánu zapríčiňuje nedorozumenia, považujeme za dôležité venovať jeho objasneniu väčšiu pozornosť. Použijeme metódu paralely. Psychickú štruktúru pripodobníme ku štruktúre somatickej (soma – telo). Sledovať budeme iba spoločnú zákonitosť – javy antropomorfné.

Ľudské telo sa prejavuje somatickým pohybom, ktorý je mnohotvárny a uskutočňujú ho jednotlivé somatické orgány či súbory orgánov. Každý orgán sa prejavuje svojou funkciou: tá je buď vykonávaná dobre – vtedy hovoríme o zdravom, čiže ***fyziologickom orgáne****, alebo chybne – vtedy hovoríme o chorom, čiže* ***patologickom orgáne****. Proces odhaľovania patologických javov a ich príčin voláme diagnostikou, proces odstraňovania patologických deformít voláme liečením či terapiou.*

Analogicky k somatike, aj psychika sa prejavuje duševným pohybom, ktorý je mnohotvárny a ktorý zaisťujú jednotlivé ***duševné orgány****, či ich súbory. Duševný orgán, ktorý si svoju funkciu vykonáva dobre, nazveme* ***zdravým*** *či* ***psychofyziologickým****, v opačnom prípade hovoríme o* ***chorom*** *či* ***psychopatologickom*** *duševnom orgáne. Odhaľovanie psychopatologických javov a ich príčin voláme* ***psychodiagnostikou****, odstraňovanie týchto deformít voláme* ***psychoterapiou****. V ďalšom texte budeme predponu ‚psycho' vynechávať, pokiaľ nehrozí nedorozumenie*[28]*."*

V této kapitole se zaměříme na nejčastější nemoc matematického orgánu žáka, formalismus. V případě této nemoci jsou v žákově paměti uloženy informace bez potřebných vazeb vytvářejících porozumění. Tedy matematickou znalost žáka tvoří mozaika informací uložených v paměti. Když paměť selže, je žák v koncích.

Položme si otázku, jak nákaza formalismu do matematického orgánu přichází. Dítě samo o formální znalosti nestojí. V kapitole Proces poznávání v příbězích 3 (hypotetické matky reagují na dceru při mytí nádobí) a 4 (Filip počítá jablka) jsme viděli, že do vědomí dítěte se formální znalost dostala v důsledku snahy dospělého urychlit intelektuální rozvoj dítěte. Oba uvedené příběhy se týkaly dětí předškolního věku. Teď se podíváme na školáka. Budeme zkoumat, co se děje s matematickým orgánem žáka v první třídě, když hlavním cílem, který učitel ve vyučování sleduje, je rychlost a spolehlivost počítání. Začneme ale u učení se čtení a psaní.

Čtení a psaní versus počítání – kybernetický model čtení a psaní

2.3

14 **Příběh**
Ivor čte a počítá

První ročník, hodina čtení. Ivor čte text My máme…
Čte chybně „My mamo“. Učitelka hocha opraví „My máme“, hoch po učitelce správně opakuje.

O hodinu později má Ivor vypočítat 2 + 3 =. Hoch řekne chybně „šest“. Učitelka hocha opraví „dvě a tři je pět“. Hoch po učitelce správně opakuje.

Komentář k příběhu 14
Dvě skoro stejné didaktické situace – a navzdory tomu reakci učitelky posuzujeme zcela rozličně. V prvním případě učitelka postupuje správně, v druhém chybně.

Rozdíl spočívá v rozdílnosti sledovaných výukových cílů.

Cílem výuky čtení (a psaní) je automatizace schopnosti číst (a psát), tj. přiřadit danému psanému textu správné zvuky (přiřadit daným zvukům správný zápis). Kognitivní funkce, která se zde buduje, je *asociace* mezi vizuálním a akustickým jevem. Pokud se žák dopustí chyby, je jasné, že chyba je v nesprávné asociaci, a učitel ji opraví „přemazáním“ chybné odpovědi žáka odpovědí správnou.

Zcela jiný je cíl výuky počtů. Žák využívá souvislostí a odpověď vyvozuje. Podstatou kognitivní funkce, která se zde buduje, není asociace, ale *kauzalita*, která je v kompetenci matematického orgánu. Tedy cílem výuky matematiky je rozvoj matematického orgánu. Dopustí-li se žák při počítání chyby, není jasné, kde chyba vznikla. Když učitelka Ivora opravila, žákovi moc nepomohla. Řekla mu, že udělal chybu. To podstatné, proč chyba vznikla, mu ale neřekla. Možná si neuvědomila, jak je to důležité. Možná ani nevěděla, jak to zjistit.

Ukážeme metodu, jak je možné zjistit příčinu Ivorovy chyby. Použijeme k tomu kybernetické schéma procesu řešení úlohy typu 2 + 3 =_. Nejprve se s myšlenkou kybernetického schématu seznámíme v jednodušší situaci procesu učení se čtení a psaní.

Na obrázku 6 je nakresleno kybernetické schéma, na němž ilustrujeme proces učení se artikulovat hlásky, opisovat písmena, číst napsaná písmena a psát písmena vyslovená. Schéma obsahuje 4 vnější boxy: Tabule (nebo učebnice, nebo pracovní sešit…), Sešit (nebo stírací tabulka, nebo tabule…), Hlas učitele (nebo rodiče, nebo sourozence…), Hlas žáka. Dále schéma obsahuje vnitřní boxy: Oko, Zraková představa, Ruka, Ucho, Sluchová představa, Hlasivky a 10 kanálů: vstupní *a*, *e*, výstupní *d*, *h* a vnitřní *b*, *c*, *f*, *g*, *A*, *B*.

Obr. 6

VNĚJŠÍ SVĚT	Tabule		Hlas učitele
	a ↓		**e ↓**
	Oko		Ucho
	b ↓		**f ↓**
VĚDOMÍ ŽÁKA – ČERNÁ SKŘÍNKA	Zraková představa	**→ A →** **← B ←**	Sluchová představa
	c ↓		**g ↓**
	Ruka		Hlasivky
	d ↓		**h ↓**
VNĚJŠÍ SVĚT	Sešit		Hlas žáka

Proces 1

Maminka tříletému synovi řekne „ř“; přes kanály e a f se zvuk dostane do sluchové představy dítěte a syn se snaží zvuk opakovat; to je cesta přes kanály *g* a *h*. Tento proces učení se artikulaci hlásek kódujeme posloupností kanálů *ef gh*.

Proces 2

Učitel na tabuli napíše písmeno „m“. Kanály *a* a *b* přenesou tento znak do zrakové představy žáka a on se snaží znak zapsat do sešitu; to je cesta přes kanály *c* a *d*. Tento proces učení se psaní písmen kódujeme *ab cd*.

Výzva 9

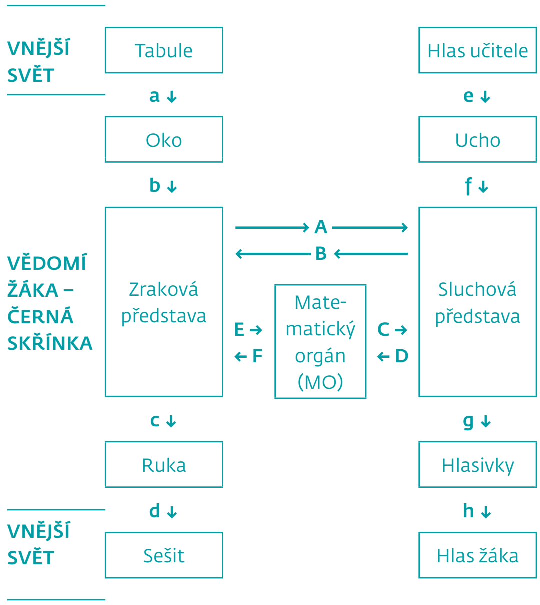
Popište proces 3, který je kódován jako *ab A gh*, i proces 4, který je kódován jako *ef B cd*.

Vnitřní kanály *A* a *B* jsou asociační. Budují se současným vnímáním znaku a zvuku. Jestliže žák znak „m“ čte „a“, učitel jej opraví, řekne „m“ a žádá žáka, aby to opakoval.

Žák se učí počítat

Pro potřeby procesu počítání musíme horní kybernetické schéma obohatit o vnitřní box Matematický orgán a čtyři další vnitřní kanály *C*, *D*, *E*, *F* (viz obr. 7). Tyto kanály vzájemně propojují představy množství se zrakovými, resp. sluchovými, představami čísla: Kanál C přiřadí představě množství „ ** “ sluchovou představu „dvě“; kanál *D* přiřadí sluchové představě „tři“ představu množství „ *** “. Kanál *F* přiřadí představě množství „ ***** “ zrakovou představu „5“; kanál *E* přiřadí zrakové představě „4“ představu množství „ **** “.

Obr. 7



Proces 1

Na tabuli je úloha 2 + 3 = . Znaky „2“ a „3“ se přes kanály *a*, *b* a *E* dostanou do matematického orgánu jako představy množství „ ** “ a „ *** “. Znak „+“ je pak kanálem E transformován na příkaz „dej dohromady“. Žák to udělá: (**), (***) → (*****). Pak se cestou *a*, *b* a *E* znak „=“ dostane do matematického orgánu jako příkaz „výsledek zapiš číslicí“. Žák představě množství „ ***** “ kanálem *F* přiřadí zrakovou představu „5“ a tu přes kanály *c*, *d* zapíše. Tento proces kódujeme stručně *abE MO Fcd*, kde *MO* představuje operaci sčítání, která proběhla v matematickém orgánu. Přiznejme, že uvedený kód je nepřesný. Měl by být správně psán: *abE abE abE MO abE MO Fcd*, protože zvnějšku byly přenášeny čtyři znaky. Pro naše účely ale stručný kód stačí.

V procesu 1 byly zadání úlohy i odpověď žáka dány písmem, vizuálně. Další tři možnosti, které zde vznikají, přenecháme čtenáři jako možnost hlouběji proniknout do práce se schématem na obrázku 7.

Výzva 10

Popište proces 2: Úlohu „Kolik je dvě plus tři?“ formuluje hlasem učitel a žák hlasem odpovídá.

Výzva 11

Popište proces 3: Úlohu „Kolik je dvě plus tři?“ formuluje hlasem učitel a žák odpověď píše na stírací tabulku.

Výzva 12

Popište proces 4: Úloha 2 + 3 = je napsána v učebnici a žák odpovídá hlasem.

Výzva 13

Miron lépe řeší úlohy na sčítání, když jsou napsané, Hedvika zase úlohy mluvené. Co lze říct o práci vnitřních kanálů schématu z obrázku 7 u těchto dětí? Máte osobní zkušenosti s uvedeným jevem? Podiskutujte o tomto jevu s kolegou.

Vraťme se nakonec k příběhu 14 (Ivor čte a počítá), který inicioval konstrukci schématu z obrázku 7. Ivor v procesu 4 (viz výzvu 12) odpověděl chybně „šest“. Vidíme, že chyba mohla vzniknout na čtyřech místech:

1. kanál E transformoval představu znaku „2“ na představu množství „ *** “
2. kanál E přiřadil představě znaku „3“ představu množství „ **** “
3. v matematickém orgánu došlo k chybnému sčítání (**), (***) → (******)
4. kanál C transformoval představu množství „ ***** “ na představu slova „šest“.

Otázku, jak zjistíme, která z těchto příčin to byla, diskutujeme v následující podkapitole. Nutno poznamenat, že žák se mohl dopustit více než jedné chyby. Tuto eventualitu zde diskutovat nebudeme.

Dvě zcela různé strategie řešení úlohy 2 + 7 = _

2.5

Schéma z obrázku 7 jsme tvořili pomocí série experimentů se žáky prvního a druhého ročníku několika bratislavských tříd. Dva z těchto experimentů, převedených do češtiny, uvedeme.

15 **Příběh**
Dionýz sčítá 2 + 7 pomocí prstů a knoflíků

Dionýz má před sebou na papíře úkol 2 + 7 = _. Na lavici má i počítadlo a tucet stejných knoflíků. Hoch chvíli počítá na prstech, pak vezme knoflíky. Oddělí dva a pak po jedné odpočítá 7 knoflíků. Aniž by tyto dvě skupiny knoflíků spojil, tiše je spočítá po jedné. Knoflíky přitom trochu posouvá. Omylem jeden počítá dvakrát a řekne výsledek „deset“. Experimentátor žádá hocha, aby knoflíky ještě jednou přepočítal. Dionýz uspořádá knoflíky do řady a počítá opět, tentokrát hlasitěji a pečlivěji. Nakonec řekne „devět, jen devět“.

16 **Příběh**
Saskie umí 2 + 7 zpaměti

Ve stejné situaci je Saskie. Ta ihned na papír zapíše výsledek 9. Rozvine se dialog.

Experimentátorka 1: „Jak jsi to vypočítala?“
Saskie 2: „Já to vím.“
E3: „A proč je to devět?“
S4 (ihned): „Protože sedm a dvě je devět.“
E5: „A kdybych ti nevěřila? Jak mne přesvědčíš?“ Dívka otázce nerozumí, je ticho. Experimentátorka k ní přisune počítadlo i knoflíky.
S6: „To jako pomocí knoflíků?“
E7: „Například tak. Nebo pomocí počítadla.“ Dívka rychle odpočítá 9 knoflíků a 9 kuliček počítadla a zkoumavě hledí na experimentátorku.
S8: „Takto?“
E9: „A kde jsou ty dvě a těch sedm?“ – ukazuje na čísla 2 a 7 ze zadání.
S10: „No tady.“ Ukazuje na napsaná čísla.
E11: „Ale tady v těch knoflících, nebo na tom počítadle. Kde jsou tam ty dvě?“
S12: „Tam je už těch devět.“
E13: „A umíš spočítat čtyři plus sedm?“
S14 (dívka si napíše 4 + 7, hledí na to a po chvíli řekne): „To je přes deset, to neumím.“ Experimentátorka nevěděla, jak se ptát dál, pokus ukončila.

Komentář k příběhům 15 a 16
Dionýz řeší úlohu s porozuměním. Protože zatím neumí udělat operaci sčítání v představě, modeluje úlohu pomocí knoflíků. Když udělá podobných manipulativních operací dostatečný počet, bude schopen udělat operaci sčítání v představě, dokonce se tento spoj naučí zpaměti. Tak manipulace s knoflíky rozvíjí jeho matematický orgán. Po čase hoch umí určit počet 2 vhledem, ale počet 7 musí určit říkankou[29]. Někteří žáci i ty dva knoflíky počítali po jedné, ale více bylo těch, kteří počet sedm tvořili postupem 2 + 2 + 2 +1. Jeden hošík vzal 2 knoflíky, pak položil na stůl 5 prstů a přidal k nim 2 knoflíky. Ty čtyři knoflíky druhou rukou dal dohromady a řekl „devět“. Bylo jasné, že spoj 5 + 4 = 9 má hoch již automatizován.

29
Hranici, kdy se říkanka „jedna, dvě, tři, čtyři, pět…“ stává vědomým odpočítáváním číselné řady, lze jen těžko určit. Zpočátku dítě pouze opakuje posloupnost slov, která pro něj nemá numerický význam – je pouze říkankou podobně jako například „enyky, benyky, kliky, bé“. Náběhovou etapou k porozumění říkance jako číselné řadě je synchronizace mezi kinestetikou a akustikou, tedy období, kdy dítě zároveň s vyřčenými slovy říkanky ukazuje jednotlivé předměty. Klíčem, který určí, že už dítě číselnou řadu vnímá jako číselnou řadu, je dovednost dítěte odpočítat číselnou řadu pozpátku.

Chyba, které se Dionýz dopustil, vznikla při evidenci počtu, tedy přímo v MO. Experimentátor díky manipulaci chybu viděl a mohl reagovat přesně.

Příběh 15 dává odpověď na otázku z příběhu 14: Jak zjistíme, kde se Ivor dopustil chyby při výpočtu 2 + 3 = 6? Odpověď zní: Požádáme hocha, aby nám to ukázal na počítadle, nebo pomocí knoflíků. To je univerzální rada. Manipulací se celý myšlenkový proces zpředmětní a my uvidíme příčinu chyby. Často během manipulace najde příčinu chyby žák sám. Nicméně učitel skoro vždy dokáže z počínání žáka zjistit, kde k chybě došlo.

Saskie řeší úlohu pomocí paměťového spoje 7 + 2 = 9 a pravidla $a + b = b + a$ (viz vstup S4 v příběhu 16). Experimentátorka se snaží dovést dívku k prověření výpočtu pomocí manipulace. Neúspěšně. Dívka neví, co experimentátorka žádá. Situaci analyzujeme v následující podkapitole.

Výzva 14

Popište z vlastní zkušenosti příběh podobný příběhu 16.

Vznik nemoci formalismu: snaha o rychlé počítání a zákaz používání prstů

2.6

V této a následujících dvou podkapitolách zkoumáme, jak nevhodná edukační strategie vede k vzniku nemoci formalismu, jak umožní nemoci bujet a jak dospívá do chronického stadia.

Saskie z příběhu 16 má spoj 2 + 7 = 9 uchován pamětí. Manipulací se při učení se sčítání nezdržuje, neboť je velice úspěšná tím, že zná zpaměti všech 25 spojů sčítání do 10. Její poznatek je tedy zcela formální. Ptáme se, jak se nemoc formalismu dostala do matematického orgánu Saskie. S jistotou odpovědět neumíme, protože v době, když jsme experiment dělali, nás ještě příčina nákazy formalismu zajímala jen okrajově. O této příčině se dnes můžeme dohadovat na základě našich rozhovorů s učiteli. Předkládáme jedno vypravování mladé učitelky, naší čerstvé absolventky, která v době vyprávění učila teprve dva měsíce.

30
Antisignálem je slovo nebo slovní spojení, které odkazuje na určitou operaci, ale k vyřešení úlohy je potřeba použít operaci opačnou. Příklad: Na výlet jelo 51 dětí, což bylo třikrát více než vloni. Kolik dětí jelo vloni? Přes výskyt slov „třikrát více" získáme odpověď dělením.

17 Příběh
Uvádějící učitelka Regina radí nepoužívat prsty

(Vypravuje Ráchel, archiv autora.) Na škole máme tři první třídy. V A třídě učí penzistka Regina, v B třídě asi pětatřicetiletá Vladana a v C učím já. Regina je moje uvádějící učitelka. Pečuje o mne mateřsky, ale, žel, i autoritativně. Před týdnem byla u mne na hospitaci a pak mi naléhavě radila, spíše přikazovala, abych žákům co nejdříve zakázala používat prsty a abych denně promrskávala operaci sčítání s cílem zvýšit rychlost. Když jsem namítala, že na fakultě nás učili jinak, řekla, ať na ty teoretiky, kteří živého žáka ani nevidí, zapomenu co nejdříve. Uvedla, že když to radila Vladaně, neposlechla. Prsty povoluje ještě i na konci druhého ročníku. Řekla: „Když šla před třemi roky Vladana na mateřskou, převzala jsem její prvňáky. Neuměli vůbec počítat. V druhém ročníku jsem až do Vánoc nedělala nic jiného, než opakovala a opakovala sčítání a odčítání. A stejně jim to nešlo tak, jako mým žákům na konci první třídy. S takovým počítáním je pak nácvik násobilky, nebo dokonce dělení, velice obtížný."

Ráchel mne žádala o radu, co s tím dělat. Jak má zkušenou a autoritativní Reginu přesvědčit, že důležitější než rychlost je porozumění?

Výzva 15
Co byste poradili Ráchel?

Komentář k příběhu 17
Přirozený proces učení se matematice je, jak bylo ukázáno, zdlouhavý. V době, když Dionýz vyřeší jednu úlohu, Saskie jich vyřeší pět, možná i více. Když si žák zapamatuje, že 2 + 3 = 5, bude jeho odpověď rychlá a spolehlivá. Asociačních spojů typu 2 + 3 → 5 je při počítání do 6 pouze 21 a při počítání do 10 pouze 55. Když žák navíc zjistí, že sčítání je komutativní a že 0 + x = x + 0 = x, klesne tento počet na 9, resp. na 25. To žák pamětí dobře zvládá. Když zvolí tuto cestu, bude úspěšný. To v jeho vědomí založí metakognitivní poznání, že matematika se učí asociací, tedy pamětí. Na této práci se matematický orgán podílí jen okrajově, a tudíž jeho rozvoj ustrne. To se pak projeví později, až se objeví složitější učivo. Na tom byla založena i moje rada Ráchel (viz výzvu 15). Poradil jsem jí, ať si zjistí, jak jde matematika žákům Reginy, když se dostanou do pátého nebo šestého ročníku.

Sociálně je uvedená situace pro mladou učitelku svízelná. Vinu na tom má vedení školy, které nesleduje, jak si žáci Reginy a Vladany vedou na druhém stupni. Jsem přesvědčen, že žáci Reginy s objevením se zlomků a záporných čísel a slovních úloh s antisignálem[30] zjistí, že „jim nebylo dáno, že nemají buňky na matematiku". Ve skutečnosti ale nemoc formalismu způsobená učitelovým tlakem na rychlost a zákaz používání prstů zablokovala rozvoj jejich matematického orgánu. Saskie je typickým příkladem oběti této edukační strategie.

Existují ale žáci, kteří vzdorují tlaku učitele a „podvádí", když potajmu používají prsty. Proč to dělají? Cítí potřebu rozumět tomu, co říkají, a to je stojí lepší ohodnocení učitelem. Bývají často považováni za nezbedy. Díky neposlušnosti se jejich matematický orgán rozvíjí, a až se objeví složitější věci, které již nebude možné zvládat pamětí, předčí své dnes dosud úspěšnější spolužáky, jejichž matematický orgán zakrněl.

Posilování nemoci formalismu: učitel direktivně řídí žáka

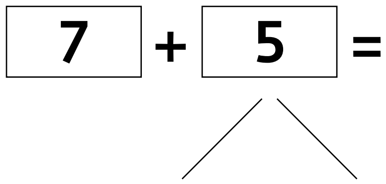
Protože se jedná o častý jev s velice negativním dopadem na žáky, věnujeme mu více pozornosti: dva příběhy a jednu podrobnou analýzu.

31
Převzato z HEJNÝ, Milan – KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*, 2. vyd., op. cit., s. 31 (kráceno).

18 **Příběh**
Aurel počítá 7 + 5 jako 6 + 6

Na konci prvního ročníku již žáci znají přechod přes desítku. Aurel má říct, kolik je 7 + 5. Hoch ihned odpoví, že je to dvanáct. Učitelka se jej ptá, jak to počítal. Hoch řekne „to je jako šest a šest“. Učitelku to neuspokojí a zavolá Aurela k tabuli. Sama na tabuli napíše (viz obr. 8):

Obr. 8



Učitelka 1: „Tak, Aurele, co uděláš s tou pětkou?“
Aurel 2: „Musím ji... (rozpaky)“
U3: „Soňo, poraď Aurelovi.“
Soňa 4: „Rozložit. Musíme...“
U5 (skočí dívce do řeči): „Výborně, Soňo, musíme tu pětku rozložit. Ták. A jak ji rozložíme? Co ta sedmička zde?“ (Obrací se na Aurela)
A6 (vzpomněl si a rychle mluví): „Doložíme do deseti; bude to... tři.“
U7: „Výborně, tři (píše číslici 3 k levé nožičce na tabuli). Ták, a co napíšeme sem (ukazuje pod pravou nožičku), Aurele?“
A8 (je zmaten): „Čtyři.“ Hoch vidí, že je to špatně, tak nesměle dodává: „...tři a čtyři je sedm.“
U9: „Ale podívej, ty to máš doplnit do pětky...“ (Klepe na číslo 5)
A10: „Tři a dvě je pět.“
U11: Výborně, dvě (dopisuje číslici 2 pod pravou nožičku) a už to tady máme, (spojuje číslice 7 a 3) to je deset (ukazuje na číslici 2) a dvě, (pauzou žádá o vstup hocha) deset a dvě je...“
A12: „Dvanáct.“
U13: „Výborně, sedm a pět je dvanáct (dopisuje za znak rovnítka číslo 12). Dobře jsi to vyřešil.“

Komentář k příběhu 18
Ponechme stranou kontroverzní postup přechodu přes desítku a analyzujme pouze to, co se odehrává ve vědomí Aurela.

Součet 7 + 5 Aurel našel pomocí majákového spoje 6 + 6 = 12 (spoje, který žák bezpečně zná a může se o něj opřít) a poznatku 7 + 5 = 6 + 6. Učitelka ale nacvičuje přechod přes desítku, takže Aurelův postup zamítne. Aniž by hochovi řekla, že jeho výsledek je dobře, volí mocenský postup. Nakreslí obrázek 8 a ptá se na první krok algoritmu (U1). Aurel nechápe. Vstup (U3) Aurel vnímá jako soud „já to neumím, Soňa to umí“. Slovo „rozložit“ mu něco připomene. Učitelka (U5) nedovolí Soně dokončit větu, protože ostře sleduje svůj záměr: hbitě realizovat algoritmus. Hoch stále neví, co se děje. Správně doplní číslo 7 do 10 (A6) a učitelka ihned číslo 3 zapíše. Další otázkou (U7) žene výpočet vpřed. Aurelovu chybu (A8) opraví a dává hochovi sugestivní nápovědu (U9). Hochova odpověď obsahuje číslo, které chce učitelka slyšet (A10) a učitelka dokončí řešení v podstatě sama (U11) a (U13).

Příběh ukazuje, že nemoc formalismu je zapříčiněna pomýleným přesvědčením učitelky o cíli její práce – naučit žáky hbitě a spolehlivě počítat. Na úrovni do deseti chce učitelka dosáhnout asociace bez manipulace s prsty, počítadlem nebo jinými předměty. Přechod přes desítku vnímá jako bariéru, kterou chce překonat aplikací jistého pravidla. Jedno i druhé je proti přirozenosti dětského uvažování. Kontraproduktivní je zde i častá snaha rodičů, kteří v nejlepších úmyslech jednají podobně, případně vyvíjejí tlak, aby se dítě početní spoje naučilo nazpaměť.

Výzva 16

S kolegy diskutujte o tom, jakou životní zkušenost z této příhody Aurel získal.

Podle našeho názoru se jedná o zkušenosti dvě. První je o tom, co je matematika, druhá o tom, co mohu od učitele žádat:

školní matematika není o porozumění, ale o imitaci postupů učitele;

učitele nezajímá, co si myslím; od něj se dozvím pouze to, jak to má být dobře.

Jestliže se tedy učitel ptá, kolik je 7 + 5, pak zde nejde o nalezení výsledku, ale o předvedení procedury, kterou třída nacvičuje. Z toho plyne, že matematika má sociální, nikoli logický charakter. Nejde zde o řešení problémů a hledání pravdy, ale o přičinlivé podřízení se autoritě. Z tohoto hlediska má popsaná instruktivní výuka matematiky dopad na formování budoucího občana. Učí jej podřizovat se autoritě.

19 Příběh
Albert řeší úlohu o tramvaji[31]

Albert (druhý ročník) je skvělý počtář. Slabší je ve čtení a psaní. Jeho učitelka často hocha napomíná, aby odpovídal celou větou. Příběh otevírá úloha:

V tramvaji jelo 31 lidí. Na zastávce 4 osoby vystoupily a 13 jich přistoupilo. Kolik lidí jelo dále?

Učitelka 1 (přečte úlohu z tabule a obrátí se ke třídě): „Tak kdopak nám to půjde vyřešit?"
Albert 2 (hlásí se a je vyvolán): „Čtyřicet." (Rychle se opraví) „Dále pojede čtyřicet osob."
U3 (vyčítavě): „Copak takhle se řeší písemná slovní úloha? Bez znázornění, bez zápisu? Bez výpočtu? Bez písemné odpovědi? Pojď, Alberte, k tabuli a pořádně to zapiš."
A4 (stojí u tabule, dívá se na text napsané úlohy): „Jelo třicet jedna lidí (napíše 31). Pak nastoupilo třináct a vystoupili čtyři… (pod číslo 31 píše hoch 13 – 4 = …)"
U5 (přeruší hocha): „Počkej, počkej, co to tam šmudlíš? My ti vůbec nerozumíme. Hanko, ty mu rozumíš? (Nečeká na reakci Hanky) Vidíš, žádný ti nerozumí. Tak to smaž a vyřešíme úlohu pořádně. Napiš ‚jelo osob' (Albert pomalu a nepěkně píše jelo osob… 31)…"
U6: „Teď pod to napiš, ‚vystoupilo' a napiš, kolik jich vystoupilo."
A7 (píše vystoplo … 4, je gestem učitelky upozorněn na chybu. Napsané smaže a píše slovo znovu, přičemž polohlasem říká) „*Vy-s-t-o-u-p-i-l-o čtyři*."
U8: „Vidíš, že ti to jde. A teď pod to napiš ‚nastoupilo'…"
Hanka 9 (naléhavě se hlásí, a když je vyvolána, řekne): „*Přistoupilo*."
U10 (nechápavě): „Co přistoupilo?" (Teď jí dojde, že ji Hanka opravuje v souladu

se zadáním úlohy) „Aha, ano, nastoupilo, nebo přistoupilo, obojí je dobře. To je totéž." (K Albertovi) „Ale tak jo, napiš přistoupilo, ale hlavně napiš, kolik to bylo."
A11 (píše a polohlasem si říká): „*P-ř-i-s-t-o-u-p-i-l-o třináct*."
U12: „Výborně. Zadání úlohy je zapsáno a my můžeme začít řešit. Kolik kroků bude mít naše řešení? Podívejte, děti: (učitelka na tabuli ukazuje) nejprve čtyři vystoupili, to bude první krok a pak jich třináct přistoupilo, to bude druhý krok. Tedy kolik kroků bude mít naše řešení?"
A13: „Dva. Naše řešení bude mít dva kroky."
U14: „Výborně, dva kroky. Tak vypočti první krok. Bylo jich ve voze třicet jedna a čtyři vystoupili. Když vystoupili (předponu „vy" zdůraznila), tak budeme ty čtyři – co? Alberte?"
A15: „Odečítat. Budeme je odečítat."
U16: „Výborně, odečítat. Tak to, Alberte, odečti. (Učitelka se obrátí k tabuli a vidí, že Albert již napsal 31 – 4 = 27) Alberte, nesmíš předbíhat. Pak nevíme, co se děje. No dobře, tak to zapiš. Zapiš, že teď je ve voze dvacet sedm lidí."
A17 píše: „*...teď je ...27*" – a dívá se na učitelku, zda je to dobře.
U18: „Když ti čtyři vystoupili, zůstalo ve voze dvacet sedm osob. Jsme již hotovi, Hynku?"
Hynek 19: „Ještě nejsme hotovi."
U20: „Co musíme udělat teď? Hynku? (Protože hoch nereaguje okamžitě, učitelka pokračuje sama) Musíme udělat druhý krok výpočtu."
Hy21: „Musíme udělat druhý krok výpočtu."
U22: „Výborně. (Vidí, že Albert si hraje s magnetkou, chce ho zřejmě zaskočit) Co tedy, Alberte, uděláš?"
A23 (není otázkou učitelky vůbec zaskočen): „Přičtu těch třináct k dvaceti sedmi."
U24 (vyčítavě): „Aspoň když jsi u tabule, tak si nehraj. (Mírněji) Ano, přičteš, ale proč musíme přičítat? Hynku?"
Hy25: „Abychom to vypočetli."
U2: „To jistě, ale přičítat musíme proto (dramatická pauza), protože ti lidé do vozu přistoupili. (Důraz na „při-") Tak to, Alberte, vypočti a zapiš."
A27 (píše 27 + 13 = 40): „Mám napsat odpověď?" Po souhlasu napíše: „Dále jelo 40 osob."
U28: Vidíš, Alberte, že to jde. Teď si to všichni zapíšeme do školních sešitů.

Výzva 17

Pokuste se samostatně o analýzu příběhu 19. Pak kriticky čtěte podkapitolu 2.8.

Analýza příběhu 19

Příběh 19 analyzujeme podrobně, protože je poučný.

Objevnou strategii, kterou použil Albert – přičíst k cestujícím v tramvaji rozdíl mezi počtem těch, kteří nastoupili a těch, kteří vystoupili – nechává učitelka bez povšimnutí. Albert ihned vidí řešení. Učitelka jeho odpověď nepřijímá, protože žák nepostupuje tak, jak to ona žáky učí a jak to od nich vyžaduje. Tvořivé a produktivní myšlení žáka není vítáno, hoch musí postupovat tak, jak to nacvičují, tedy nápodobou a reprodukcí. Písemný pokus Alberta (A4) řešit úlohu po svém učitelka znevažuje slovem „šmudlíš".

Učitelka na hocha útočí ve jménu celé třídy a (U5) vnutí Hance odmítavé stanovisko k Albertovu postupu. Žáci samozřejmě cítí, že to, co paní učitelka řekla, nemusí být pravda, ale nátlakové klima žádnému z nich nedovolí na tuto demagogii upozornit. Ve vědomí žáků se tak posiluje zkušenost, že demagogie je legitimním prostředkem při komunikaci mocných se slabými.

Učitelka (U5) přikáže Albertovi smazat vše, co napsal. Mazání nápisů věcně správných, ale učitelkou neautorizovaných je vítězstvím moci nad pravdou. Učitelka po oznámení „vyřešíme úlohu pořádně" sama řídí řešení. Ona rozhoduje, co, jak a proč se bude dít, Alberta degraduje na písaře. Celý proces řešení od vstupu U6 až do závěrečného U28 je řízen učitelkou. Žákům není ponechán žádný prostor.

Učitelka za správné a chvályhodné považuje jednání žáka, které plně odpovídá tomu, co ona žákům přikazuje a co očekává. Za nežádoucí a pokárání hodné považuje každé autonomní jednání žáka, které není v souladu s rituály, které ona od žáků požaduje. Nepochybuje o správnosti svého postupu. Názory většiny kolegů ji utvrzují v tom, že dát prostor spekulantům znamená ztrácet čas a vystavit slabší žáky zmatkům. Nad řešením „spekulantů" se vůbec nezamýšlí. Cítí se dobře a správně ve vedoucí roli a očekává, že její dominantní postavení žáci přijmou a potlačí vlastní přístup.

Zajímavý moment nastane, když žačka (Hanka 9) opraví učitelku. Ta řekla „nastoupilo" (U8), ale Hanka upozorňuje, že v textu úlohy je „přistoupilo". Hanka asi očekává pochvalu za to, že je tak pozorná. Učitelka však v opravě cítí osten výčitky, neboť trpí předsudkem, že chyba je něco špatného a že učitel se nemá mýlit. Hanku nepochválí a nepoděkuje jí za opravu. S jistými rozpaky korekci akceptuje. Zřejmě proto, že předpona „při" je důležitá. Svoji chybu však nepřizná. Význam opravy a vlastní chybu bagatelizuje slovy „Nastoupilo nebo přistoupilo, obojí je dobře. To je totéž" (U10). Odpoutává pozornost žáků od své chyby přenesením důrazu jinam: „...ale hlavně napiš, kolik to bylo."

Pro učitelku je rozhodující to, co je napsáno na tabuli, nikoli to, co je v hlavách žáků. Vychází z předpokladu, že když je to dobře na tabuli, bude to dobře i v hlavách učících se žáků. Když žák neodpoví dostatečně rychle, pokračuje učitelka sama (U20).

Albert u tabule trpí. Jeho snaha byla devalvována. Učitelka však jeho postoj diagnostikuje jako nezájem a chce hocha přistihnout, že nedává pozor (U22). Ale nepovede se jí to, hoch odpoví správně. Stejně jej učitelka pokárá (U24). Učitelka od žáků vyžaduje, aby předepsané rituály plnili s radostí a přičinlivostí.

Ne všichni žáci mocenskému tlaku učitele podlehnou. Známe více případů, kdy žák tlaku učitele odolal. I za cenu špatných známek si uchoval autonomii myšlení.

Posilování nemoci formalismu: učitel žákům prozradí generický model, čímž jim znemožní jeho objev

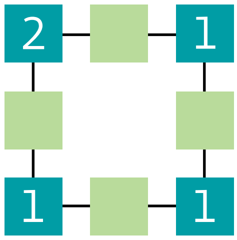
2.9

20 **Příběh**

Učitelka Klára prozradí žákům velké tajemství

Učitelka Klára učí ve třetím ročníku. Ne z vlastní vůle používá učebnici F3[32] a stále cítí potřebu dávat žákům více úloh na nácvik, protože se jí zdá, že její děti neumějí počítat. Násobilkové čtverce jsou na počítání, ale podle Kláry zde žáci více filozofují, než počítají, a navíc pracují jen s malými čísly. Proto se Klára rozhodla dát zde důraz na procvičování. Hned na začátku hodiny zadala žákům cvičení uvedené na obrázku 1 v podkapitole 1.1 kapitoly Proces poznávání:

Obr. 1



Vyřeš násobilkový čtverec a zjisti součet čtyř středových čísel.

Stejnou úlohu vyřeš i v případě, že je místo čísla 2 v levém horním rohovém poli číslo:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 9 f) 10 g) 19.

Na tabuli nakreslila tabulku 1:

Tab. 1

roh	2	3	4	5	6	9	10	19
součet	6							

Vyzvala žáky, aby doplnili čísla do prázdných okének tabulky. Po chvíli byla tabulka vyplněna a žáci viděli, že čísla v řádku „součet“ narůstají po dvou. Učitelka pak dokreslila další řádek a do něj dopsala poloviny součtů. Tak vznikla tabulka 3.

Tab. 3

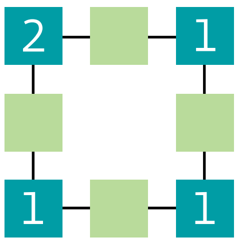
roh	2	3	4	5	6	9	10	19
součet	6	8	10	12	14	20	22	40
$\frac{1}{2}$ součtu	3	4	5	6	7	10	11	20

Janka řekla, že ta dolní čísla jsou o 1 větší než horní čísla. Klára ji pochválila a řekla, že teď již vidí, jak se ten součet počítá. Napsala na tabuli rovnost

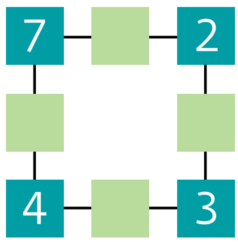
$$(1 + 1) . (2 + 1) = 6 \qquad (4),$$

nakreslila čtverec z obrázku 9a a řekla: „Podívejte se na ten čtverec a na toto.“ (Ukázala na (4).) Pak nakreslila čtverec z obrázku 9b a vyzvala žáky: „Kdo umí najít k tomuto čtverci tu rovnost?“

Obr. 9a



Obr. 9b



Žáci učitelce nerozuměli. Proto dodala: „Podívejte, tady jsou čísla jedna, jedna, dvě a jedna (ukazuje na vztah (4)) a tady jsou též čísla jedna, jedna, dvě a jedna (ukazuje na čísla ve čtverci z obr. 9a).“ Erika vykřikla, že to ví, a na tabuli napsala (7 + 2) . (3 + 4).

32
HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*, op. cit.

Učitelka Eriku pochválila: „Výborně, jen ještě musíš prohodit číslice 2 a 3." Sama to udělala, takže na tabuli byl teď nápis (7 + 3) . (2 + 4). Pak třídu oslovila spikleneckým hlasem: „Dávejte pozor. Prozradím vám velké tajemství. Naučím vás řešit všechny násobilkové čtverce. Čísla sečtu do kříže; sedm a tři... (prstem ukazuje čísla 7 a 3) je deset (píše 10); pak dvě a čtyři... (prstem ukazuje čísla 2 a 4) je šest (k desítce píše 6). A pak je vynásobím (mezi 10 a 6 dopíše tečku, znak násobení) a máme šedesát (píše 10 . 6 = 60). Jasné?" Několik žáků přitakává. Jednoho z nich, Vlastíka, učitelka volá k tabuli: „Vlastíku, pojď, vyřešíš tento čtverec." Učitelka kreslí další čtverec vedoucí na výpočet (6 + 5) . (4 + 1).

Hoch úlohu dobře vyřešil. Pak učitelka rozdala žákům úlohy, které doma připravila. Každý žák dostal papír s tuctem násobilkových čtverců, ve kterých výsledky vycházely až jako čtyřmístná čísla. U každého čtverce měl žák najít výsledek novým pravidlem a pak jej prověřit i přes výpočet čtyř středových čísel.

Komentář k příběhu 20

Klára nechtěla vynechat objevitelský proces, ale zkrátila jej tak, že žádný žák nemohl vidět, jak se k návodu, který učitelka předvedla, došlo. Kdyby hned řekla návod sama a od žáků pouze žádala, aby jej na několika úlohách prověřili, bylo by to asi účinnější.

Tím, že Klára prozradila výsledný vztah, ke kterému se měli žáci dobrat až během půl roku, učinila objevitelský proces bezpředmětným. Není ovšem vyloučeno, že se najde žák, který se pokusí odhalit tajemství návodu, zjistit, proč to funguje. Ale určitě těch žáků nebude mnoho. Na druhé straně nácvik vložený do násobilkových čtverců je pro žáky asi méně únavný než tradiční počítání sloupečků.

To podstatné, co příběh ukazuje, je skutečnost, že umělé urychlování poznatků je zároveň zpomalováním rozvoje matematického duševního orgánu. Viděli jsme to již na úrovni předškoláka v příběhu 4, kdy Filip počítal jablka.

2.10

Chronické stádium nemoci formalismu: přesvědčení žáka o vlastní nemohoucnosti

21 **Příběh**

Petra čeká, až to bude správně

Do naší čtvrté třídy přibyla v březnu 1986 nová žákyně, Petra. Třídní učitelka ji hodnotila jako komunikativní, pilnou, veselou, sebevědomou a dobrou recitátorku.

Žáky jsem v té době učil již jeden a půl roku a žáci věděli, že s řešením úloh jim nepomáhám, ale důvěřuji jejich schopnostem vše vyřešit. Jednoho dne byla na tabuli úloha: Doplň scházející číslice do nákupního účtu (viz obr. 10).

Po chvíli již někteří žáci oznamovali výsledky. Irena řekla, že to má více řešení, a šla je psát na tabuli. Její první řešení je na obrázku 11.

Proti tomuto řešení protestoval Miloš, který tvrdil, že mýdla musí být za 8,40 Kčs. Elena Ireně řekla, že jí nevychází zubní kartáčky. Zeptala se Ireny: „Kolik stojí jeden kartáček?“ Irena po chvíli odpověděla, že se to neprodává na kusy, ale jako balíček tří kartáčků. Hela řekla, že tak se zubní kartáčky neprodávají. Debata běžela.

U tabule již bylo více žáků a hádka sílila. Jen Petra nedělala vůbec nic, seděla a dívala se. Zeptal jsem se jí, proč úlohu neřeší. Odpověděla, že mi už přece řekla, že na matiku je pitomá a že čeká, co bude na tabuli, pak si to opíše. Teď to opisovat nemůže, protože co když jsou tam chyby a ona se to pak naučí chybně.

Komentář k příběhu 21

Dívka byla osudově přesvědčena o vlastní matematické nemohoucnosti. Vše se učila zpaměti. Jediné, co si hlídala, bylo, aby se učila jen to, na čem se třída shodla, že je to dobře. Často se ale stávalo, že třída připustila dva různé postupy. Pak ode mne chtěla říct, který postup se má naučit. Diskusi na toto téma odmítala. Byla skálopevně přesvědčena, že zapojení vlastního rozumu do řešení je plýtvání časem. Dívka ze třídy asi po třech měsících odešla, a tak ke konfliktu spočívajícímu v názoru na to, co je matematika, mezi námi (nebo mezi mnou a matkou dívky) nedošlo[33]. V té době jsem ještě neznal způsob léčby tohoto předsudku, a tak jsem se omezoval na příležitostné domluvy. Bezúspěšně.

Případ Petry rozhodně není ojedinělý. Existují ale i žáci, kteří díky vhodné konstelaci událostí prolomí svůj komplex méněcennosti. O tom vypráví následující dva příběhy.

33
Rodiče jsou někdy přesvědčeni, že povinností učitele je naučit žáky, jak se která úloha řeší. Představa, že by matematiku měly děti objevovat samy, je jim vzdálená, ba podezřelá (oni se ji takto neučili!). Následně toto přesvědčení mohou sdílet jejich děti, nebo být v této otázce ve schizofrenní poloze.

Obr. 10

4 mýdla	8 , _ _ Kčs
zubní pasta	4 , 3 0 Kčs
3 kartáčky	1 _ , _ 0 Kčs
	2 5 , 0 0 Kčs

Obr. 11

4 mýdla	8 , 0 0 Kčs
zubní pasta	4 , 3 0 Kčs
3 kartáčky	1 2 , 7 0 Kčs
	2 5 , 0 0 Kčs

Prolomení komplexu méněcennosti

22 **Příběh**
Bára chce do zlomků vidět

Bára (osmý ročník) se již od šestého ročníku snažila udržet si z matematiky trojku. Vždy den před písemkou z matematiky vyhledala strýce, aby s ní učivo procvičil. Odmítala jakékoli vysvětlování, chtěla pouze procvičovat. Jednou se ale situace změnila. Přinesla strýci zvláštní úlohu a chtěla jejímu řešení rozumět. Úloha zněla: „Kolik třetin musím odečíst ze $\frac{7}{6}$, abych dostal $\frac{1}{2}$?" Strejda jí ukázal řešení: sestavím rovnici $\frac{7}{6} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$, vynásobím šesti, mám $7 - 2x = 3$, tedy $2x = 4$, čili $x = 2$. Báře to nestačilo, chtěla tomu rozumět. Chtěla, aby jí strýc dal další podobnou úlohu. Pilně pracovala bezmála dvě hodiny a hned si domluvila další doučování. Asi po dvou týdnech kreslení obrázků, stříhání a překládání papírů a různého dělení hromady knoflíků na části začala do zlomků trochu vidět. Pak přišla a zářila štěstím, protože učitel ji vyvolal, dlouho se s ní u tabule bavil a velice ji pochválil, že se hodně zlepšila. Holky jí prý řekly, že měla krk rudý štěstím a že si toho učitel určitě musel všimnout. Mladý učitel, který převzal výuku matematiky po kolegyni, co odešla na mateřskou, byl zdrojem Bářiny motivace. Pro Báru byla popsaná příhoda zlomová. Dokonce šla studovat na matematické gymnázium a pak výborně zdolala i elektrofakultu.

23 **Příběh**
Michal se ztrácel ve vzorcích o mocninách

Michal, syn našich sousedů, sextán gymnázia, přišel s prosbou, abych mu vysvětlil mocninné funkce. Prý mu hrozí v pololetí pětka. Ještě na začátku roku, když se dělaly geometrické konstrukce, byl na tom velice dobře. To mu šlo. Chyby nedělá ani u desetinných čísel, i když zde ta pravidla nezná. Těm číslům rozumí. Teď je ale ve vzorečkách o mocninách zcela ztracen. Říkal, že jeho problém je v tom, že když se naučí jedno pravidlo, jde to dobře. I druhé a třetí pravidlo. Když pak ale dostane úlohu, kde je třeba použít všechna pravidla najednou, tak se mu to v hlavě zdrcne a vše poplete. Chtěl nějakou pomůcku, jak se v tom bludišti pravidel orientovat.

Dal jsem Michalovi tři diagnostické úlohy a bylo mi jasné, že s jeho myšlením to vůbec není špatné. Plete vzorečky, má zmatek v zacházení se zlomky, ale pokud situaci nakreslíme, úlohy zvládá. Řekl jsem mu, že vzorečky a pravidla necháme stranou a budeme se snažit vše vidět, modelovat, kreslit, znázorňovat pomocí grafů a dávat do tabulek. Slíbil jsem mu, že to chvíli potrvá, než se začnou zlepšovat známky, ale když začne pracovat, tak to do konce roku dotáhne na trojku. Michal vřele souhlasil. Naše doučování začínalo u zlomků a záporných čísel na úrovni páté třídy ZŠ. Spekulativní úlohy, které jsem mu dával, se mu líbily. Pracoval nejen pilně, ale i s rostoucí radostí. Asi po dvou měsících intenzivního doučování přišel a vykládal, jak jako jediný ve třídě uměl vyřešit úlohu z kombinatoriky. Všichni tam zkoušeli vzorečky a on to namaloval a viděl. V septimě se propracoval na dvojku a maturoval na jedničku. Na vysoké škole zemědělské byl v kroužku nejlepším matematikem.

Komentář k příběhům 22 a 23
Oba příběhy ukazují, jak zásadní úlohu při matematickém vzdělávání hraje přesvědčení žáka o vlastních schopnostech. Samozřejmě, že tam, kde učitel od žáka žádá jen nacvičené postupy a nepřipouští tvořivost, žák není veden k tomu, aby matematice rozuměl, a naděje na jeho matematický růst je mizivá.

Závěrem ke kapitole 2

2.12

Kapitolu uzavřeme třemi klíčovými tezemi. První odpovídá na otázku, co je formální poznatek. Druhá říká, jak tato kognitivní nemoc (výskyt formálních poznatků) vzniká, a třetí, jaké má nemoc důsledky.

1. Poznatek, který není podepřen zkušeností člověka, tedy není opřen o GM nebo aspoň IM a je uchován pouze pamětí jako izolovaná informace, jako obsah vědomí, který stojí oddělen od dalších podobných obsahů, nazýváme formálním poznatkem. Příznakem (symptomem) nemoci je rychlé a přesné odříkání takové převzaté (sdělené, přečtené) informace, doprovázené nemožností sdělit ji v jiné formě, než v jaké byla převzata (například nákresem, manipulací, vlastními slovy).

   Protipólem formálního poznatku je neformální znalost – znalost skutečná, organická (neboť je přirozenou součástí jiných znalostí), která byla v době vzniku obvykle provázena radostí z nově objevené pravdy. V realitě se běžně setkáváme s poznatky žáků, které jsou částečně formální, protože se do vědomí žáka dostaly transmisí (byly žákovi předloženy, ne-li vnuceny), ale později byly částečně zživotněny dodatečně získanými IM nebo GM.

2. Formální poznatek vzniká v důsledku snahy edukátora (učitele nebo rodiče) urychlit poznávací proces žáka; edukátor dá (někdy vnutí) žákovi hotový poznatek. Své chyby si není vědom, domnívá se, že pro vzdělání žáka dělá maximum.

3. Žák, který se zřekne nároku na kognitivní autonomii, tedy vzdá se samostatného, nezávislého uvažování a podřídí se přijímání hotových poznatků, nabude přesvědčení, že mu nebylo dáno porozumět matematice a že jeho případná snaha o takové porozumění je plýtváním časem a energií. Matematika se mu stane džunglí znaků a vztahů bez logických vazeb a hierarchie, jejichž počet neustále narůstá a dříve či později se stane pamětí nezvladatelným.

Tam, kde je přesvědčení žáka o jeho nemohoucnosti osudové, nelze nic reedukovat. Smíření se s vlastní neschopností porozumět matematice vede k matematické a někdy i intelektuální invaliditě.

Tam ale, kde žák věří v možnost nápravy, je reedukace možná. Čím starší je žák, tím náročnější je reedukace. Podmínkou úspěchu je proto i důvěra edukátora v žákovy schopnosti. Nejen povzbuzování, ale i jeho vysoká očekávání. Každý žák totiž z chování edukátora bezpečně vycítí, zda v žákovy schopnosti věří, zda je jeho přesvědčení o žákově potenciálu skutečné, nebo jen hrané.

Číslo

3

Podobně jako u jiných oblastí poznávání, i u aritmetiky se my dospělí lidé snažíme dítěti nabídnout (občas i vnutit) naše představy o čísle. Z analýzy poznávacího procesu již víme, že účinnější je vést dítě a žáka k tomu, aby řešením vhodných úloh a diskusí s kamarády sám svět čísel odhaloval. Vhodnými úlohami jsou ty, které žáka motivují k práci. Příliš lehká úloha jej nudí, příliš náročná úloha jej frustruje a v obou případech úloha žene žáka do pasivity. Vhodná úloha dává žákovi příležitost postoupit na žebříčku poznávání o krůček dopředu. Takovou úlohu budeme schopni žákovi předložit, jestliže budeme znát žebřík, po kterém žák při poznávání světa čísel stoupá. Toto poznání je cílem této části publikace.

Sémantické[34] a strukturální vnímání čísla

3.1

Číslo je ve vědomí dítěte a žáka uloženo ve dvou základních prolínajících se schématech: ve schématu sémantickém a schématu strukturálním.

3.1.1 Sémantické představy

Sémantické představy žáka o čísle jsou ty, v nichž je číslo propojeno se světem žáka, s jeho životními zkušenostmi. Z tradičního učiva náleží do této oblasti především slovní úlohy. U nich žák ztroskotá většinou proto, že nedokáže úlohu uchopit, nedokáže si představit slovně popsanou situaci. Tato skutečnost, která představuje jeden z nejzávažnějších problémů didaktiky matematiky, byla diskutována v kapitole Formální poznatek a bude analyzována i dále v tomto textu.

V oblasti slovních úloh se gramotnost matematická prolíná s gramotností čtenářskou. Ilustruje to následující příběh.

24 **Příběh**
Uchopování slovní úlohy předškolákem

V září 2014 uskutečnila kolegyně R. Zemanová sérii experimentů s cílem diagnostikovat matematické schopnosti a znalosti 28 žáků vstupujících do školy. Každý žák byl diagnostikován jednotlivě pomocí baterie šesti úkolů. Pátým úkolem diagnostické baterie byla následující úloha:

Úloha 3
V garáži bylo zaparkováno několik aut. Dvě auta z garáže odjela. V garáži zůstala zaparkována tři auta. Kolik aut bylo v garáži zaparkováno na začátku?

Úlohu experimentátorka řekla (případně opakovaně) a po odpovědi byl žák tázán, jak k výsledku dospěl. Polovina žáků (přesně 14) dala správnou odpověď ihned. Tři další žáci se opravili, když vysvětlovali, jak k výsledku došli. U většiny chybujících žáků bylo možné z videonahrávky experimentu zjistit, že příčinou chyby byla neschopnost uchopit a propojit všechny tři informace úlohy: 1. ptáme se na počet aut v garáži na začátku; 2. víme, že 2 auta odjela; 3. víme, že v garáži zůstala 3 auta. Buď chybující žák některou z podmínek vypustil či pozměnil, nebo si neuvědomil časový sled podmínek.

Výzva 18
Zopakujte tu část experimentu R. Zemanové, která se týká úlohy 3. Analyzujte případné chybné odpovědi i vysvětlení žáků, jak úlohu řešili. Pokuste se co nejpřesněji určit příčinu chybného úsudku.

Z učiva založeného na matematických prostředích jsou sémantické představy o čísle plně přítomny v prostředích Autobus, Děda Lesoň, Krokování, Schody a Rodina. Částečně jsou sémantické představy o čísle přítomny v prostředích Biland, Hadi a Pavučiny.

Sémantické představy žákovi zprostředkují:

- porozumění světu matematiky propojením čísel s jeho životními zkušenostmi,
- rozvoj jeho schopnosti aplikovat matematické znalosti v běžném životě.

34
Sémantický – zabývající se smyslem, významový.

35
Řešení C = 7 a D = 0 je nekorektní, neboť 07 není dvojciferné číslo.

Druhý z uvedených bodů bývá často považován za to hlavní, proč se máme matematice učit. Podle našeho přesvědčení je závažnější bod první, protože získáváním porozumění pro pojmy, vztahy, procesy a situace matematika nejvíce přispívá k intelektuálnímu rozvoji žáka.

3.1.2 Strukturální představy

Strukturální představy žáka o čísle jsou ty, v nichž se čísla objevují pouze ve vzájemné vazbě, bez propojení na životní zkušenost jedince. Většina tradičního učiva spadá do této oblasti. Z učiva založeného na matematických prostředích jsou strukturální představy o čísle přítomny zejména v prostředích Algebrogramy, Barevné trojice, Násobilkové čtverce, Řady, které se lámou, Součtové trojúhelníky, Sousedé, Střelba na cíl a Tabulka 100.

Strukturální představy jsou často redukovány na nácvik čtyř základních operací. Nácvikem lze získat rychlost a spolehlivost reprodukce početních spojů, ale nelze tak získat vhled do světa čísel, do mnohavrstevných vazeb jednotlivých podstruktur tohoto světa. Vhled do světa čísel získávají žáci řešením úloh z různých matematických prostředí.

Tak například algebrogramy otevírají cestu nejen k hlubokým myšlenkám desítkové soustavy, ale i k dělitelnosti, rovnicím a logice. Uvedeme ilustraci.

Úloha 4

Řešte algebrogram: a) AB + B = 26; b) CD − DC = 63.

Žák třetího ročníku řeší obě úlohy metodou pokus–omyl. V úloze a) kromě snadného řešení 23 + 3 = 26 najde i náročnější řešení 18 + 8 = 26, které pracuje s přechodem přes desítku. Podobně experimentováním vyřeší žáci i úlohu b). Najdou řešení CD = 92 a CD = 81. Náročné je dokázat, že žádné další řešení neexistuje. Většina žáků řekne něco jako „zkoušel jsem to, ale nic jiného tam nesedí“. Najde se ale žák, který vidí do situace hlouběji a najde sofistikovaný důkaz. O tom vypráví následující příběh.

25 **Příběh**

Martin sofistikovaně pracuje s algebrogramy

Martin, žák čtvrtého ročníku, dokázal, že algebrogram AB + B = 26 má jen ta dvě výše uvedená řešení. Uvažoval takto: A nemůže být jiná číslice než 1 nebo 2. Když je A = 1, pak AB napíšu jako 10 + B, a tedy AB + B = (10 + B) + B = 26, odkud B + B = 16, a tedy B = 8. Když je A = 2, pak AB = 20 + B, a tedy (20 + B) + B = 26, odkud B + B = 6, a tedy B = 3. Podobně Martin řešil i úlohu b). Vyšetřil případy, kdy C je 7, 8 nebo 9.

Na začátku pátého ročníku již Martin svůj objev rozkladu dvoumístného čísla obohatil o úpravu algebraického výrazu a úlohu b) vyřešil elegantněji. Napsal CD = 10 C + D a DC = 10 D + C. Pak našel
CD − DC = (10 C + D) − (10 D + C) = 9 C − 9 D = 9 . (C − D). Odtud původní vztah CD − DC = 63 upravil na 9 . (C − D) = 63, což redukoval na rovnici C − D = 7. Tato rovnice má právě dvě řešení: CD = 92 a CD = 81[35].

Týž den, kdy mi Martin přinesl toto krásné řešení, řekl, že stejným způsobem se dá dokázat kritérium pro dělitelnost číslem 9. Toto kritérium vyčetl v nějaké učebnici a samostatně je dokázal. Ale řešení úlohy CD − DC = 63 si cenil výše než odhalení kritéria pro dělitelnost devíti.

Podobně jako Algebrogramy přispívají k hlubšímu porozumění aritmetice i další strukturální prostředí. Násobilkové čtverce propojují dělení, násobení, rozklad čísla na součin prvočísel a rozvíjejí vhled řešitele do distributivního zákona. To je i jedna z funkcí Šipkových grafů, které jsou primárně zaměřeny na jev linearity a lineární rovnice. Jsou grafickým záznamem rovnic a umožňují hledat jejich řešení experimentováním.

36
V závorce je uvedeno číslo vstupu dané výpovědi v protokolu.

3.1.3 Od představ sémantických ke strukturálním – desémantizace

Dvouleté dítě slovem máma rozumí jedinou osobu, vlastní mámu. Později ve školce pozná, že i jiné děti mají mámu, a pochopí abstraktnější význam tohoto slova. Stále mu je ale nejasné, proč jeho máma babičku nazývá mámou. Když se mu to vyjasní a pochopí, že každý člověk má mámu a že slovo máma je vztah dvou jedinců, začne tomuto slovu rozumět na abstraktní úrovni. Na té úrovni pak bude dítě schopno vědět, že dcerou jeho babičky je máma a teta Amálka, i to, že s bratrancem mají společnou jednu a jen jednu babičku.

Posun, který jsme sledovali u porozumění slova máma, se odehrává u všech abstraktních slov, včetně číslovek. Ilustruje to následující příběh.

26 **Příběh**
Sčítání předškoláka, prvňáka a druháka Radka

Ptám se předškoláka Radka, kolik je dvě plus tři. Hoch se dívá na jablka na stole a ptá se: „Dvě jablka a tři jablka?“ Po mém souhlasu hoch vybere dvě jablka, pak tři jablka, dá to dohromady, spočítá a řekne, že pět jablek. Pak ukážu na misku s bonbony a ptám se, kolik je dohromady dva bonbony a tři bonbony. Obdobně hoch spočítá bonbony a řekne „pět bonbonů“. To, že se jedná v obou případech o stejný výpočet, hoch neeviduje. Tato skutečnost překvapila přihlížejícího hochova otce, který mínil, že jsem měl hochovi říct, že k spočítání bonbonů může použít předchozí výpočet. Byl zklamán, že jeho syn je tak nechápavý, že to nevidí. Viz komentář k příběhu 4 (Pětiletý Filip počítá jablíčka).

O půl roku později na otázku, kolik je dvě a tři, Radek pomocí prstů odpověděl „pět“. O další rok později již na danou otázku řekl výsledek „pět“ bez počítání. Když pak ve škole zvládl číslice jako abstraktně vyšší jazyk, zapsal uvedený poznatek v abstraktní formě: 2 + 3 = 5.

Komentář k příběhu 26
Popsaný proces, který proběhl ve vědomí Radka, nazveme *desémantizací*. Nejprve hoch nevěděl, co je to dvě nebo tři, ale věděl, co jsou dvě jablka nebo tři lentilky. Jestliže znakem 2* označíme sémanticky ukotvené číslo 2 a podobně 3* a 5* sémanticky ukotvená čísla 3 a 5, pak popsanou desémantizaci lze zapsat jako posun od porozumění vztahu 2* + 3* = 5* (2 objekty + 3 objekty) k porozumění vztahu 2 + 3 = 5. Ve škole pak Radek nácvikem sčítání a odčítání spoje automatizuje. Když se jej ale mladší sestra zeptá, kolik je dvě plus tři, poradí jí, ať si to spočítá na prstech. Z toho plyne, že abstraktní poznatek 2 + 3 = 5 je v Radkově mysli stále propojen na sémantiku. Hoch dovede abstraktní poznatek 2 + 3 = 5 udělat pro sestru srozumitelným pomocí vztahu 2* + 3* = 5*. Desémantizace, kterou hoch prošel, nepřetrhala propojení abstraktního poznání s konkrétními modely. Hoch je schopen strukturální poznání sémantizovat. Proto v tomto případě mluvíme o desémantizaci *vratné*.

27 Příběh
Útlum sémantických představ třeťáka Radka

Radek je již ve třetím ročníku. Patří k nejrychlejším počtářům třídy. Hůře mu jdou slovní úlohy. Učitelka mu tuto neznalost toleruje, protože hoch skvěle násobí i dělí.

Komentář k příběhu 27

Učitelka si neuvědomuje, že ve vědomí hocha dochází k roztržení vazby mezi výpočty a sémantickými představami. Neví, že toto je rozhodující nedostatek matematického rozvoje žáka, který bude mít fatální následky. Učitelka chválou kalkulativní rychlosti a přesnosti deformuje metakognitivní přesvědčení hocha. Ten je utvrzován ve víře, že matematika je spíše o rychlosti a správnosti počítání než o myšlení. Matematické poznání hocha ztrácí oporu v sémantických představách. Když hocha požádáme, aby vytvořil slovní úlohu na sčítání 163 + 509 a aby v úloze bylo slovo „utratil", nebude toho schopen. Desémantizace, ke které ve vědomí hocha dochází, je *nevratná*.

Příběh Radka ukazuje, jaké důsledky může mít opomíjení sémantiky. K ničemu jsou Radkovi jeho kalkulativní schopnosti, které nebude umět v životě použít. Nevratná desémantizace znehodnocuje skoro celé matematické poznání žáka.

3.1.4 Příčiny nevratné desémantizace

Příběh Radka ukázal, že k nevratné desémantizaci dochází v důsledku mylného přesvědčení učitele, že znalosti opřené o sémantiku mají nižší hodnotu než znalosti strukturální. Proto například někteří učitelé zakazují žákům používat prsty k počítání. Těm, kteří bez prstů počítají pomalu a nejistě, dávají učitelé za příklad spolužáky, kteří počítají, jako když bičem mrská. Neuvědomují si, že násilně urychlená desémantizace bývá nevratná a nutně vede k invalidnímu poznání. Poučný je v této souvislosti následující příběh.

28 Příběh
Pro Kamila nula není číslo

Kolegyně S. Peclinovská sledovala, jak její žáci čtvrtého ročníku uvažují o tom, zda číslo nula je, nebo není sudé. Z audionahrávky žákovských výpovědí kolegyně Peclinovská sepsala mnohastránkový protokol obsahující 346 vstupů. My z protokolu vybereme pouze několik výpovědí ukazujících, jaké obrovské potíže dělá Kamilovi proces desémantizace pojmu nula. Již na začátku protokolu hoch tvrdí, že nula není ani sudá, ani lichá, protože „Nic je prostě nic" (20)[36].

Kamil vřele souhlasí s Lenkou, která namítá: „Jak se to může rozdělit na nula a nula? To je k ničemu." (29)

Zazní další myšlenky. Kamil stále opakuje: „Ale nula je nic a to přece neexistuje." (77)

Učitelka se zapojí otázkou: „Takže podle tebe, Kamile, když to rozdělit nejde, tak je to liché číslo?" (111)

Kamil nesouhlasí: „Ne, pani učitelko, to není ani jedno, protože nula je prostě nic." (112)

Hoch, kterému stále několik spolužáků oponuje, dochází k poznání, že klíčové je slovo „existuje". Proto otevírá novou myšlenku: „Jakoby kdyby byli třeba dva vymyšlený paňáčci, který jakoby nejsou, který neexistujou, tak je nemůžeme rozdělit, protože jako neexistuje a nebo třeba..." (234)

Kamil se na chvíli zamyslí a Standa vstupuje: „Ale pořád jsou to panáčci, který už jakoby jsou, když už je někdo nakreslí, tak už jsou.“ (236)

Kamil oponuje: „Ale počkej, ale jakoby třeba viděls někde jakoby, jakoby třeba v matematice nebo tak, že jakoby nula se dá rozdělit? Já teda ne.“ (237)

Komentář k příběhu 28

Diskuse pokračuje, ale k tomu, co chceme ilustrovat, uvedené výseky protokolu stačí. Pro Kamila je nula reprezentována představou prázdna, s nímž nelze nijak manipulovat. Protože sudost je ve vědomí hocha propojena na akci půlení, tedy manipulaci, nelze u nuly o sudosti mluvit. Objekt „nula“ ještě v Kamilově vědomí není desémantizován.

Kdyby učitelka autoritativně prohlásila, že nula je sudé číslo, měl by Kamil dvě možnosti: revoltovat, nebo se podvolit. První možnost by (v závislosti na způsobu revolty) mohla vést až ke kázeňskému trestu, druhá k rezignaci na pochopení, proč je nula číslo sudé. Naštěstí učitelka se této chyby nedopustila a trpělivě čeká, až Kamil (a s ním i Lenka a několik dalších žáků) po diskusích se spolužáky dozrají k pochopení toho, že nula je stejné číslo jako třeba 1 nebo 2 a že je to číslo sudé.

To, že Kamil, žák čtvrtého ročníku, není ochoten akceptovat nulu jako prvek aritmetické struktury, nám může připadat podivné. Když si ale uvědomíme, že Babyloňané, kteří již uměli řešit i některé kvadratické rovnice, nulu neznali, tak to až tak podivné není. Konečně náročnost nuly jako objektu aritmetické struktury můžete sami pocítit, když se zamyslíte nad následující výzvou.

Výzva 19

Pokuste se rozumně zdůvodnit vztahy $1^0 = 1$ a $0^0 = 1$.

Příběh Kamila ukazuje na dvě věci. Na to, jak je některý krok desémantizace pro žáky náročný a na to, jak náročné je pro učitele vyvarovat se konání, které by vedlo u některých žáků k nevratné desémantizaci.

Tuto kapitolu uzavřeme ještě další výzvou, která se týká pravidla o sčítání zlomků. Toto pravidlo bývá běžně vyvozeno na strukturální úrovni sérií algebraických úprav založených na rozšiřování zlomku: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$. Pro mnoho žáků je takové vyvození nepochopitelným žonglováním s písmeny.

Výzva 20

Pokuste se vytvořit gradovanou sérii úloh, které žáka čtvrtého ročníku dovedou pomocí sémantických představ k odhalení uvedeného vztahu.

Sémantické představy čísla

3.2

Informace „ve třídě byli tři hoši“ vyvolá v mé mysli jistou představu. Jiná bude představa, když se dozvím, že „ze třídy odešli tři hoši“, a jiná, když mi řeknou, že „v naší třídě máme o tři hochy více než v sousední třídě“. Výrazně jiná je představa čísla tři ve výpovědi „třetí třída je ve třetím podlaží“ nebo ve výpovědi „každý třetí žák z naší třídy má staršího sourozence“. Kolik vlastně těch různých představ spojených s číslem tři existuje? To se pokusíme zjistit.

3.2.1 Soubor úloh jako nástroj mapování představ čísla

Tucet slovních úloh odhaluje širokou paletu sémantických kotvení čísla. Prvních šest úloh uvádí číslo jako **kvantitu**. Úlohy 5.7 až 5.9 uvádí číslo jako **identifikátor**. Poslední tři úlohy uvádí číslo jako **frekvenci**.

Výzva 21

Každou z uvedených tří kategorií budeme v dalším textu analyzovat podrobněji. Když se čtenář o takovou analýzu pokusí samostatně, bude lépe připraven na podněty, které nabídneme v naší analýze.

Úloha 5.1

Na písku si hrály 3 děti. Dva byli hoši a zbytek byly dívky. Kolik tam bylo dívek?

Úloha 5.2

Náš kocourek váží 1 kg a pes váží 4 kg. Kolik váží dohromady?

Úloha 5.3

Ze dvorku odešly dvě dívky a pak odešli tři hoši. Kolik dětí odešlo ze dvorku?

Úloha 5.4

Mirek je o 3 cm vyšší než Norbert a ten je o 4 cm nižší než Olin. Kdo je vyšší, Mirek, nebo Olin? O kolik centimetrů?

Úloha 5.5

Sylva nasbírala dvakrát tolik kaštanů co Adina a Adina nasbírala třikrát tolik kaštanů co Ria. Tedy Sylva nasbírala ___ krát více kaštanů než Ria. Doplň scházející číslo.

Úloha 5.6

Před Vánoci zvýšili cenu kabátu o čtvrtinu a v březnu novou cenu snížili o pětinu. Zjistěte, zda byla cena kabátu v dubnu vyšší, nebo nižší než před Vánoci. Zjistěte, kolikrát byla vyšší/nižší.

Úloha 5.7

Bydlím v 5. podlaží. Eva bydlí v 8. podlaží. O kolik podlaží nade/pode mnou bydlí Eva?

Úloha 5.8

Tramvaj číslo 17 vyjela z konečné ve 14:20 hodin a na druhou konečnou dojela v 15:17 hodin. Jak dlouho jí cesta trvala?

Úloha 5.9

Pátá Beethovenova symfonie byla napsána v roce 1808 a devátá v roce 1824. Kolik let uplynulo mezi těmito daty? Kolik symfonií v těchto letech skladatel napsal?

37 Všechno ať samo plyne, ať ve věcech násilnost není. (KOMENSKÝ, Jan Amos. *Obecná porada o nápravě věcí lidských*, op. cit.)

Úloha 5.10

Tramvaj má dopoledne interval 8 minut. Kolikrát vyjede z konečné v době od 8:01 hodin do 8:20 hodin?

Úloha 5.11

Na každé straně aleje je 24 stromů. Na každém šestém stromě je budka pro ptáčky. Kolik je v aleji budek?

Úloha 5.12

V tombole každý třetí los vyhrává. Výhru obdrželo 32 hostů. Kolik losů bylo prodáno?

3.2.2 Komentáře k úlohám

Všechna čtyři čísla vyskytující se v úlohách 5.1 a 5.2 popisují stav. Stavy z úlohy 5.1 chápou děti i v mateřské škole, ale kilogramy jsou náročné i pro mnoho žáků prvního ročníku. Mezi těmito stavy je tedy třeba rozlišovat. Uděláme to upřesněním terminologie. Řekneme, že „3 děti" je *stav vyjádřený počtem* a „2 kg" je *stav vyjádřený veličinou*. Kvantita, která se počítá na kusy, je *počtem*, kvantita, která se počítá pomocí nějaké jednotky (například 1 metr, 1 kg, 1 Kč, 1 hodina…), je *veličinou*.

Všechna čísla vyskytující se v úlohách 5.3 až 5.6 jsou *operátory*. V úloze 5.3 i 5.4 jde o operátory *aditivní*, neboť působí pomocí sčítání (odčítání). V úloze 5.5 i 5.6 jde o operátory *multiplikativní* (o skaláry), neboť působí pomocí násobení (dělení). V úloze 5.3 jde o dva *operátory změny* vyjádřené počtem. V úloze 5.4 jde o dva *operátory porovnání* vyjádřené veličinou. V úloze 5.5 se vyskytují dva multiplikativní operátory porovnání aplikované na počet. V úloze 5.6 jsou dva multiplikativní operátory změny aplikované na veličinu. Zde nutno upozornit, že

zvýšit cenu kabátu o čtvrtinu znamená násobit cenu kabátu číslem $\frac{5}{4}$

a snížit cenu kabátu o pětinu znamená násobit cenu kabátu číslem $\frac{4}{5}$.

Tedy řešení úlohy 5.6 zní: V dubnu byla cena kabátu stejná jako před Vánoci, neboť $\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = 1$.

Všechna čísla použitá v úlohách 5.7 až 5.9 jsou *identifikátory*. Jedno z těchto čísel se od ostatních liší. Je to číslo 17 – *jméno* tramvajové linky. Všechna další čísla jsou *adresy*. Čísla z úlohy 5.7 jsou adresami *místa*, čísla z úlohy 5.8 jsou (kromě čísla 17) adresami *času*, čísla symfonií z úlohy 5.9 jsou adresami *objektů* čili pořadovými čísly a čísla 1808 a 1824 z této úlohy jsou adresami času.

V posledních třech úlohách se vyskytují čísla, která jsou *frekvencemi*. Vypovídají o tom, jak často se jistý jev objevuje. V úlohách 5.10 a 5.11 se jedná o frekvenci *rytmickou*. Vím-li například, že první tramvaj (úloha 5.10) vyjela v 8:03, vím též, že druhá vyjela v 8:11 a třetí v 8:19. Naproti tomu frekvence v úloze 5.12 je *náhodná* (stochastická). Jestliže vím, že los č. 15 byl vítězný, nevím z toho nic o dalších vítězných losech.

V úloze 5.10 nacházíme kromě čísla 8, které vypovídá o frekvenci, i adresy času (8:01 a 8:20).

V úloze 5.11 je kromě informace „na každém šestém stromě", která mluví o frekvenci, i počet stromů aleje.

Úloha 5.10 poukazuje též na častou nejednoznačnost úloh s frekvencí. Výše uvedené řešení úlohy 5.10 dává výsledek „tramvaj vyjede 3krát". Kdyby ale první tramvaj vyjížděla v čase 8:07, zněla by odpověď „tramvaj vyjede dvakrát". Ne vždy k této nejednoznačnosti dochází. Příkladem je úloha 5.11, pro kterou existuje jednoznačná odpověď „na každé straně aleje jsou 4 budky". Dodejme, že když se o frekvenci mluví v souvislosti s velkým souborem, je zmíněná nejednoznačnost zanedbatelná.

Výše uvedená klasifikace sémantického kotvení čísel není tak jasná a jednoznačná, jak náš text naznačuje. Například v úloze 5.8 může některý žák číslo 14:20 považovat za adresu místa, když si tento čas představí jako polohu ručiček na ciferníku. Podobně výraz „šest let" může někdo chápat jako počet, jiný jako veličinu, a další dokonce jako adresu. Nápis „7 hodin" může vyvolat jak představu trvání, tak představu časové adresy. Výraz „6 lžiček" může nabývat významu počtu (na stole leží 6 lžiček) i veličiny (do těsta přidáme 6 lžiček oleje). Podobně i výraz „4 koruny" může být chápán jako počet (4 mince) i jako hodnota veličiny (rohlík stál 4 Kč).

To, jak dítě/žák dané číslo uchopí, závisí na jeho individuálních zkušenostech i momentální psychické situaci, ale též na nosiči, kterým je číslo prezentováno, a situaci, ve které je prezentováno. Přitom nezřídka dochází ve třídě k tomu, že různí žáci danému číslu porozumí různě. To je nejen vítanou příležitostí k rozvoji třídní komunikace, ale též k upevňování přesvědčení, že dobrodružství odhalování matematiky je v kompetenci žáků, nikoli učitele. Efektivní chování učitele jsme poznali v příběhu 28. Učitelka neřekla Kamilovi, že nula je sudé číslo. Trpělivě vyčká, až žák k poznání dozraje sám – opět v duchu Komenského Omnia sponte fluant absit violentia rebus[37].

V životě potkáváme i čísla nejen jako stavy, veličiny, operátory, adresy a jména, ale též jako *symboly*. Symbolem je například číslo 13 ve větě „pátek třináctého je nešťastný den". Čísla jako symboly do oficiálního učiva nevstupují. Když takové číslo učitel žákům předloží, setká se obyčejně se zvýšeným zájmem, který numerologie v našem vědomí vyvolává. Náměty na takovou exkurzi do mystické oblasti čísel dává učiteli pythagorejská teorie čísel nebo kabala.

V následujících dvou kapitolách zkoumáme čísla ve významu *kvantity* a ve významu *identifikátoru*. Zde ještě provedeme krátký exkurz do první etapy otevírání matematického světa dítětem.

3.2.3 Zrod sémantického porozumění číslům

V každodenní zkušenosti několikaměsíčního dítěte se objevují slova, pro něž si dítě záhy vytvoří jasnou představu (máma, papat, hajat, dudlík...) i slova, pro něž si představu buduje postupně (kůň, vědro, číst...). Zvláštní skupinu tvoří slova, pro něž sice dítě žádnou představu nemá, ale ví, že tato slova i situace, v nichž je dospělí používají, patří k sobě. Dítě ještě nezná význam slov „devět", „osm", „pátý", ale již ví, že tato slova patří k sobě. Podobně ví, že k sobě patří slova „žlutý", „červený", „modrý". Ví, že tato slova označují barvu, ale neví, která barva je modrá. Takovou skupinu slov nazveme *partikulární verbální svět*. Takových světů si dítě do tří let spontánně vytvoří více: Svět barev, Svět jmen, Svět příbuzných i Svět čísel.

Z partikulárního světa čísel se brzy začne vyčleňovat kategorie číslovek základních – „jeden", „dva" („oba"), případně i „tři" – i kategorie číslovek řadových („první", „druhý", „třetí"...) jako slova, kterým dítě rozumí. O tom vypravuje následující příběh.

29 Příběh
Naplňování slova významem od narození dítěte

Příběh obsahuje čtyři epizody. První tři pocházejí od polské autorky A. Urbańské (1996), která evidovala proces otevírání Světa čísel u své dcerky od narození až do 6 let. Z bohatého materiálu vybíráme tři fragmenty. Čtvrtou epizodu mám z vlastní zkušenosti s vnukem.

První epizoda. Ve věku (1;3)[38] dívenka odlišuje singulár „panenka“ a plurál „panenky“; když matka obula panence botičku, dívka podala druhou a řekla „druhý“.

Druhá epizoda. Ve věku (1;5) holčička počítala balonky „raz, pět, raz, pět...“.[39]

Třetí epizoda. Ve věku (1;7) na otázku „Kolik je hodin?“, kterou babička adresovala mámě, dívenka řekla „pět“; samozřejmě to nebyla pravda.

Čtvrtá epizoda. Počítal jsem diskety a vnuk (2;6) si hrál s kostkami. Najednou se k mému počítání přidal slovy: „Pět, dva, tli, osm.“ Přitom synchronně mlátil rukou do kostky.

Komentáře k epizodám
První epizoda uvádí dva momenty, které vypovídají o tom, že dítě již v 15 měsících života může mít jistou představu mnohosti. To, že dívka rozlišuje singulár a plurál, jednoznačně svědčí o tom, že chápe rozdíl mezi jedna a více. Použití slova druhý (drugi) již ale nelze s jistotou prohlásit za představu mnohosti dvou. V polštině, stejně jako v češtině, toto slovo označuje též „jiný“. Druhá, třetí a čtvrtá epizoda ukazují, že dítě si tvoří partikulární svět čísel, který zatím není provázán s představou množství. Tento svět je propojen s komunikací s dospělými a v případě čtvrté epizody i s rytmem.

Z uvedeného plyne, že v první etapě budování světa čísel se objevují slova, za nimiž nejsou představy, ale dítě už ví, že tato slova patří do kategorie čísel (podobně jako ví, že červená patří mezi barvy).[40] *Partikulární verbální svět čísel*, který se do vědomí dítěte dostává z komunikace s dospělými, tvoří půdu, na které vznikají představy čísla. Prostředníkem, který umožňuje dávat číslům představu, je říkanka „jedna, dvě, tři, čtyři...“.

30 Příběh
Říkanka a synchronizace[41] slov a pohybů u batolete

Dívenka (2;6) se chlubí babičce, jak ji děda naučil počítat. Říká „jedna, dva, tli, čili, pět“ a u toho vystrkuje prstíky. Slova předbíhají pohyby. Procesy nejsou synchronní. Babička dívenku pochválí, posadí si ji na klín a počítá s ní tak, že synchronizuje slova a prstíky. Dívenka pak sama počítání opakuje, ale slova opět předbíhají pohyby. Pak babička začne s vnučkou tleskat „paci, paci, pacičky“ a snaží se, aby dívenka chytila rytmus a synchron pohybů a slov.

Komentář k příběhu 30
Příběh ukazuje na klíčový význam synchronizace rytmu slov a rytmu pohybů. Bez této znalosti nelze říkanku k určování počtu používat. Navíc absence synchronizace slov a pohybů má širší dopad než jen na určování počtu říkankou. Rytmus hraje v životě člověka důležitou roli již od narození. Výstižně o tom píše E. Gruszczyk-Kolczyńska (1997):

„Narodilo se dítě: křičí, je mu zima, každý dech ho bolí, bílé světlo řeže, je v poporodním šoku. Stačí je přivinout k tlukoucímu srdci člověka, ne nevyhnutelně matky, a ono se ihned uklidní. V chaosu nových stimulů rozeznalo známý mu rytmus. Pocítilo něco, co znamená klid a bezpečí. Tak tomu bude v celém životě.

38
Tedy 1 rok a 3 měsíce.

39
Dětskou polštinu překládáme do spisovné češtiny, nepokoušíme se o překlad do dětského jazyka.

40
Dospělý člověk si může myslet, že když říká dítě „jedna, pět, jedna, pět“, je to nesmysl. Není to nesmysl, je to kategorizace. Proto dítě neopravujeme, přijímáme jeho „počítání“, ale opakovaně mu umožňujeme slyšet správné počítání.

41
συνχρων (synchrón) = současný, časově souběžný; odvozeno od χρωνος (chrónos) = čas, běh času; předpona συν- (syn-) odpovídá naší předponě s-. Například συναγωγα (synagoga) = místo, kde se lidé scházejí k modlitbě; (αγω = jdu). Další příklady: synergie, synkreze.

42
Atomární analýza písemného projevu žáka je výzkumná metoda, která písemný projev žáka rozkládá na nejmenší možné myšlenkové celky (atomy), které uspořádá podle jejich časového sledu. Tímto způsobem se snaží rekonstruovat řešitelský proces žáka.

Člověk se bojí chaosu a neklidu, uniká od nich. Jestliže se něco opakuje a ukládá do rytmu, přestává neklid působit. Může to být člověkem pochopeno a předvídáno... jako první schopnost člověka se rozvíjí jeho způsobilost uvědomovat si to, co se opakuje.“

Rytmus a zejména synchronizace zvuku a pohybu napomáhá rozvoji aritmetického myšlení. K synchronizaci zvuku a pohybu mohou rodiče přispívat od nejútlejšího dětství, například tak, jak to udělala moudrá babička z příběhu.

Když učitel u žáka zjistí absenci uvedeného synchronu, poradí rodičům dobudovat synchronizaci nejlépe rytmickou chůzí po schodech doprovázenou slovy.

31 Příběh
Tříletá Jitka a panenky: z říkanky se stává nástroj

Jitka (2;10) si hraje s třemi panenkami. Máma se jí ptá, kolik má panenek. Dcera ukazuje na panenky a říká „Milka, Jana, Evička“. Stejná situace o 3 měsíce později. Jitka ukazuje na panenky a postupně počítá „jedna, dva, tli“. U každého čísla se rukou dotkne jedné panenky. Máma otázku opakuje a dívka opakuje počítání. Máma ukončí konverzaci větou: „Výborně, máš tři panenky.“ Stejná situace o dalších šest měsíců později. Jitka opět panenky počítá a říká „jedna, dvě, tli. Tli“. Na otázku mámy, kolik má tedy panenek, odpovídá: „Tli.“

Komentář k příběhu 31
Příběh ukazuje, jak se dítě postupně propracovává k použití říkanky jako nástroje porozumění číslu tři. Nejprve neví, že k určení počtu nutno použít říkanku. Ve třech letech již dívka ví, že na otázku „kolik?“ je nutno nasadit proces počítání, ale ještě necítí potřebu propojit toto počítání s představou množství. Možná v jiné situaci, například při dělení bonbonů, tuto potřebu má, ale tam k žádosti o více bonbonů nepoužije říkanku, ale přímý vhled. Když pak Jitce dojde, že poslední slovo říkanky a počítaný soubor jsou úzce provázány, vzniká ve vědomí dívky porozumění pro (malý) počet. Pro Jitku jsou teď asi dostupná čísla do tří, čtyř. Vše, co je nad tento počet, je „moc“.

Tolik tedy k zrodu aritmetických představ u dítěte. Dále již předpokládáme, že dítě, s nímž pracujeme, umí pomocí říkanky určit počet prvků malého souboru i vytvořit soubor třeba tří jablíček.

Nakonec ještě uvedeme jednu naši důležitou zkušenost. Učitelé, kterým ukazujeme „atomární“[42] zkoumání žákova aritmetického chování, často pochybují, zda má takovéto nimrání se v různých významech čísla smysl. Jsou přesvědčeni, že základy počítání se nakonec naučí každý žák a na cestě, jak k tomu dojde, ani moc nezáleží. Souhlasíme s tímto názorem, pokud se na výuku aritmetiky díváme jen z hlediska toho, zda se žák naučí počítat. Jenže výuka nepřináší žákovi jen konkrétní znalosti. Přináší mu i rozvoj jeho rozumových schopností a zejména pak vztah k poznávané oblasti. Učitel, jehož žáci se čísly rádi zabývají, jim dal víc než poznatky. Dal jim vztah k aritmetice a pomohl k lepší celoživotní orientaci v oblasti počítání.

3.2.4 Jak pomáhají znalosti o sémantickém kotvení čísla učiteli?

K tomu, aby člověk mohl svoje aritmetické znalosti v životě úspěšně použít, nestačí umět počítat a zacházet s kalkulátorem. Je nutné umět problém, který život přinese, uchopit tak, aby bylo možné k jeho řešení ten kalkulátor použít. Ve školní matematice jsou to především slovní úlohy, které žáka na používání matematiky připravují. Ty mohou být jednoduché (Emil má 5 Kč, Zdeněk má 3 Kč. Kdo má více a o kolik?), ale i značně náročné (Emil se Zdeňkem mají dohromady 20 Kč. Když dá Emil Zdeňkovi 1 Kč a ten pak ze svého současného majetku dá Emilovi třetinu, budou mít oba stejně. Kolik korun má teď Emil?).

Ke schopnosti žáka později v životě používat matematiku je třeba, aby úlohy, které žák ve škole řeší, byly stejně různorodé, jako jsou různorodé úlohy a situace životní. Učitel, který nezná bohaté spektrum kontextů čísla, má jen omezené možnosti účinně individualizovat vyučování tak, aby dítě matematiku ve svém životě vidělo. Takový učitel ani nedokáže eliminovat případné nedostatky učebnice, kterou používá.

Druhou oblastí, ve které znalosti o sémantickém kotvení čísla učiteli výrazně pomáhají, je rozšiřování číselných oborů. Když stavíme z kostek věže, pracujeme s malými přirozenými čísly. Prostředí věží nám neumožňuje dosáhnout ani na velká čísla, ani na zlomky, ani na čísla záporná. Když počítáme fazolky, můžeme se dopočítat i čísel nad 100. Když počítáme jablíčka, můžeme pracovat s polovinou i čtvrtinou, protože jablíčko lze krájet. Když krokujeme, můžeme realizovat i výpočet 2 – 3 = ? jako jeden krok dozadu.

Z uvedeného vidíme, že ke kvalitě rozvoje matematických schopností a znalostí žáka výrazně přispívá bohatost sémantických kontextů, v nichž žák číslo poznává. Učitel, který je s těmito kontexty seznámen, může žákovi vydatně pomáhat pestrostí úloh, jež mu dává.

3.2.5 Manuál ke zkoumání žákova sémantického ukotvení čísla

Každé sémantické ukotvení čísla, které budeme diskutovat, podrobíme zkoumání. Při tom nás povede série deseti otázek, kterou nazveme Manuál ke zkoumání žákova sémantického ukotvení čísla, krátce manuál.

Prvních sedm položek manuálu je věnováno bezprostřední reakci žáka na podnět vyvolaný číslem. Poslední tři položky zkoumají obecnější souvislosti.

M1: Jakým jazykem je číslo prezentováno?
M2: Jakými smysly[43] žák číslo vnímá?
M3: Jakým jazykem žák číslo zaznamenává?
M4: Jaké činnosti a smysly se na záznamu čísla podílejí?
M5: Co je žákův cíl činnosti?
M6: Jaké kognitivní nebo metakognitivní překážky se zde mohou objevit?
M7: Jak takové překážky zvládat?
M8: Jak tato prezentace čísla souvisí s jinými prezentacemi?
M9: Jaká je zde vývojová linie představ žáka? Čím se začíná, co následuje?
M10: Jaké možnosti poskytuje toto sémantické ukotvení pro rozšiřování oboru malých přirozených čísel na obor:
  a) velkých přirozených čísel
  b) zlomků
  c) desetinných čísel
  d) čísel záporných?

U prvních příběhů, které budou následovat, budeme zkoumat všechny položky manuálu, abychom naznačili způsob práce s manuálem. Později se zaměříme jen na ty položky, které se nám v daném případě jeví jako důležité a nejzajímavější. Samozřejmě čtenář může mít na základě svých zkušeností jiné vidění dané problematiky. Proto tyto zkušenosti oslovujeme následující výzvou:

Výzva 22
U každého příběhu a každého sémantického typu čísla se nejprve pokuste o vlastní zkoumání procesů probíhajících v hlavě žáka. Pomocníkem k této analýze vám bude výše uvedený manuál.

Začneme číslem jako kvantitou a pokračujeme číslem jako identifikátorem.

43
V našich úvahách jde především o zrak, pak sluch a hmat. Za smysl budeme považovat i vnímání vlastního pohybu, například počet kroků, které jsme udělali. Tento „smysl" budeme nazývat pohybový nebo kinestetický.

Číslo jako kvantita

Šest základních typů čísla jako kvantity (stav, aditivní operátor změny, aditivní operátor porovnání, multiplikativní operátor změny, multiplikativní operátor porovnání a frekvence) je uvedeno v tabulce 4.

Tab. 4

TYP			VYJÁDŘENÝ	ILUSTRACE	OTÁZKA
Stav (S)			počtem	Mám 7 kuliček. Beethoven složil 9 symfonií.	Kolik?
			veličinou	Kniha stojí 20 Kč. Auto jelo stovkou. 5 kg masa.	
Operátor (O)	aditivní	změny OZa	počtem	Vyhrál 3 kuličky. Odjela 4 auta.	Kolik? O kolik?
			veličinou	Zhubl o 5 kg. Míč byl zlevněn o 20 Kč.	
		porovnání OPa	počtem	V naší třídě je o pět dětí méně než v 5.B.	
			veličinou	Skočil o 3 cm dále. Lenka je o 7 kg lehčí než Iva.	
	multiplikativní	změny OZm		Cena dvojnásobně vzrostla. Vody trojnásobně ubylo.	Kolikanásobně?
		porovnání OPm		Anglie má pětinásobek rozlohy SR.	
Frekvence (F)	rytmická			Dopoledne jede metro každé 4 minuty.	Jak často, jak hustě?
	náhodná			Každý desátý los vyhrává.	

Poznámka: Adjektivum *aditivní* je z latinského *adicio* = přidávat; označuje operace sčítání i odčítání, protože odčítání je přičítáním čísla záporného. Adjektivum *multiplikativní* je z latinského *multipliceo* = rozmnožovat, zvětšovat; označuje operace násobení i dělení, protože dělit například číslem 7 je totéž jako násobit číslem $\frac{1}{7}$.

Stav patří k nejfrekventovanějším sémantickým typům, proto mu věnujeme zvýšenou pozornost.

3.3.1 Stav vyjádřený počtem objektů vizuálně přítomných

Kostky, se kterými si žák hraje, nebo obrázek, který si prohlíží, nejsou ani pomíjivé (jako například počet tlesknutí), ani pomyslné (jako třeba 7 trpaslíků, jestliže žádný obrázek trpaslíků nemá žák k dispozici). Na takové nosiče čísla se zaměříme nejprve.

32 **Příběh**
Prvňáčci staví věž ze čtyř krychlí.

Žáci v prvním ročníku mají na lavicích krychle. Každý žák jich má pět. Učitelka říká: „Postav věž ze čtyř krychlí." Na tabuli píše číslici 4. Urban se dívá na tabuli, odpočítá 4 krychle a z nich postaví věž. Jeho soused Tadeáš si hraje s krychlemi, postaví věž ze všech pěti krychlí. Vidí, že Urbanova věž je menší a odebere ze své věže jednu krychli. Učitelka se jej zeptá: „Proč jsi odebral tu horní kostičku?" Tadeáš: „Jako Urban." Učitelka: „A víš, co jste měli udělat?" Tadeáš: „Postavit věž."

Analýza chování Urbana, položky M1 až M5 z našeho manuálu (viz kapitola 3.2.5)
Položky M6 a M7 se neobjevily.

M1: Počet „čtyři" je prezentován slovem učitelky a číslicí 4 na tabuli.
M2: Hoch vnímá číslo sluchem i zrakem.
M3: Číslo si zaznamená výběrem 4 krychlí.
M4: Výběr dělá manipulativně, zapojen má zrak, hmat a pohyb (částečně i sluch).
M5: Postaví čtyřpodlažní věž.

Analýza chování Tadeáše, položky M1 až M7.

M1: Jako u Urbana.

M2: Hoch slyší číslo, ale neuvědomuje si to.
M3: Číslo nezaznamená.
M4: –
M5: Staví věž bez ohledu na číslo 4.
M6 a M7: Chyba, které se žák dopustil, nemá kognitivní charakter. Proto ji neanalyzujeme. O reedukaci pak nemá smysl mluvit.

Obecná analýza položek M8 až M10.

M8: Manipulativní uchopení malého čísla je vstupní branou k pochopení čísla vůbec. Buď žák zjišťuje počet objektů, nebo takový soubor vytváří (to je i náš případ). Nástroji této činnosti jsou manipulace a říkanka.
M9: Vývojová linie má čtyři dimenze:

1. Velikost souboru. Není co dodat.
2. Homogenita souboru. Bude diskutována u příběhu 34.
3. Způsob prezentace a možnost žáka číslo vnímat.
4. Způsob, jakým žák počet zjišťuje.

Ve třetí dimenzi dochází k nejsnazšímu zjištění počtu objektů souboru tehdy, je-li soubor dostupný manipulativně i zrakem. Skoro stejně náročný je soubor nakreslený, kterého se žák může prstem objektů dotýkat. Náročnější je soubor manipulativně nedostupný, dostupný jen zrakem (kolik máme ve třídě lamp), dále soubor dostupný zrakem i sluchem, ale pomíjivý (kolikrát učitelka tleskla). Ještě náročnější je soubor pomíjivý, dostupný jenom zrakem (kolikrát učitelka zvedla ruku) nebo jen sluchem (kolik bylo písknutí), a nejnáročnější je soubor smysly nedostupný (viz příběh 44). Někam do této stupnice náleží i soubor nestálých objektů (kolik hochů hraje na hřišti kopanou).

Ve čtvrté dimenzi žák nejprve používá říkanku, pak vhledem určí počet dvě, pak počet tři, pak počet čtyři atd. Zde samozřejmě vhled závisí na způsobu prezentace čísla. Určit vhledem číslo 4 na hrací kostce je snazší než například na čtyřpodlažní věži.

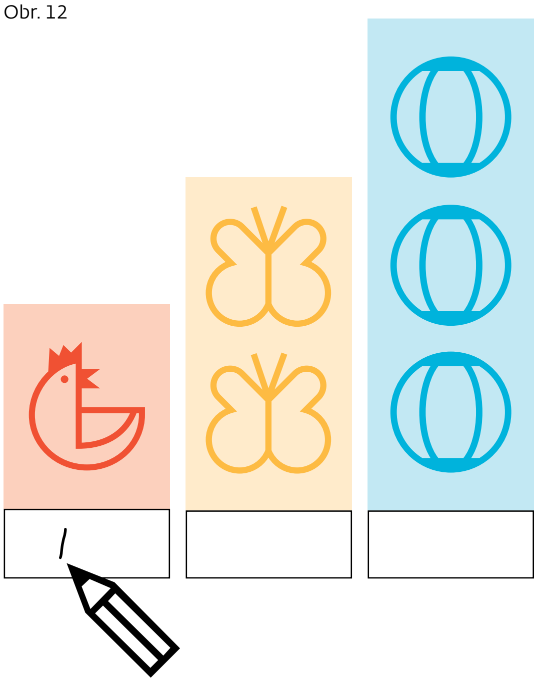
33 Příběh
Co počítáme? Koloběžky, nebo jejich kolečka?[44]

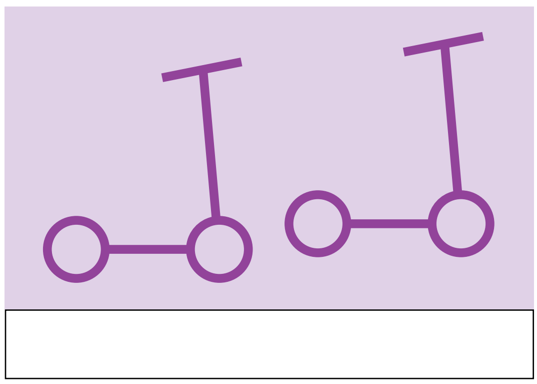
Příběh se odehrál při druhé hodině matematiky v prvním ročníku. Učitelka ještě žáky ani neznala podle jména. Žáci čárkami pod obrázkem v F1/1;8[45] značili počet objektů na obrázku: 1 kohout, 2 motýli, 3 míče... Takových obrázků je v tomto
cvičení 20. Na třináctém obrázku jsou dvě koloběžky.

Žák Andrej zde napsal 4 čárky. Jeho soused Aleš namítal, že jsou tam jen dvě koloběžky. Andrej se bránil, že jsou tam 4 kolečka. Aleš se zeptal učitelky, co je správně. Andrej řekl „ale jsou tam čtyři kolečka". Učitelka ukázala třídě obrázek, o který se hoši přou, a ptala se třídy, co si myslí. Souhlasili s Alešem, jen dva hoši řekli, že to jsou i čtyři kolečka. Po chvíli Alice přinesla učitelce svoje řešení. Měla pod obrázkem 2 čárky jako 2 koloběžky a 4 kroužky jako 4 kolečka. Učitelka Alicino

44
Podle HEJNÝ, Milan. Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně, op. cit., s. 146.

45
HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika: pro 1. ročník základní školy* 1, op. cit., s. 8.

Obr. 12


Obr. 13 (*oba obrázky jsou z učebnice*)


řešení ukázala třídě a pochválila dívku, že dobře vyřešila spor hochů. Nakonec řekla: „Aleš udělal dvě čárky, protože na obrázku jsou dvě koloběžky. To je dobře. Andrej udělal čtyři čárky, protože na obrázku jsou čtyři kolečka. I to je dobře. Chytře to udělala Alice, která zapsala dvě čárky a čtyři kolečka." Každé dítě chtělo učitelce ukázat svoje řešení.

Komentář k příběhu 33

Příběh ilustruje úspěšnou práci učitelky – dvě její reakce zasluhují pozornost. První reakce učitelky se týká sporu dvou hochů. Učitelka spor sama nerozhodla, ale přenechala jej třídě. Nakonec za správné uznala každé zdůvodněné řešení. Tím do budoucna

- povzbudila potřebu žáků hledat tvořivě alternativní řešení úloh,
- ukázala, že žáci nemohou spoléhat na rozhodnutí a rady učitelky,
- dala jim právo i povinnost rozhodovat o tom, co je dobře a co špatně, a tím v nich
- začala budovat pocit odpovědnosti za výsledky jejich rozhodnutí.

Druhá reakce učitelky se týká Alice. Tím, že učitelka dívku pochválila, naznačila i sociální rozměr budoucích diskusí: chvályhodná jsou řešení, která oslabují ostří antagonistických názorů.

Z položek M1 až M5 je zajímavá pouze první a třetí.

M1: Číslo je prezentováno počtem objektů na obrázku. Spor o koloběžky ukazuje, že obrázek může být různými žáky interpretován rozličně.
M3: Někdy se stane, že žák již zná číslice a pochlubí se tím, že zde místo čárek píše číslice. Když učitel nechá na žákovi, jak bude počet zapisovat, žák se po chvíli sám vrátí k záznamu čárkami. K tomu došlo u všech tří případů, které jsme pozorovali.

Položky M6 a M7 se neobjevily.

M8: Úlohu z příběhu 33, kde počet je vnímán zrakem, může učitelka obohatit o úlohy, v nichž budou žáci vnímat počet sluchem, hmatem nebo pohybem. Ona řekne, co je na obrázku, a žáci tlesknou tolikrát, kolik je zde objektů. Třeba řekne „míče" a žáci třikrát tlesknou.

Jiná možnost: Sousedé v lavici hrají tuto hru: Žák A řekne například „druhý řádek". Na tomto řádku je v dané úloze 5 obrázků: 2 kola, 2 čtverce, 3 sluníčka, 3 větrníky, 2 kbelíky. Žák B si z těchto obrázků jeden vybere, kupříkladu 3 sluníčka, a dá žákovi A na záda 3 prsty. Žák A pozná, že prsty jsou tři, a řekne „sluníčka nebo větrníky".

M9: Podobně jako u příběhu 32, i zde lze mluvit o čtyřech dimenzích určujících vývojovou linii:

1. Velikost souboru.

2. Homogenita souboru. Ta se vztahuje nejen k objektům, ale i jejich barvám a velikostem. Evidovat 4 stejné míče je snazší než evidovat 4 míče různých barev a velikostí.

3. Srozumitelnost prvků souboru. V první třídě je pro žáky srozumitelnější i přitažlivější počítat míče nebo panenky než čtverce nebo trojúhelníky. Na druhé straně někdy obrázek panenky inspiruje dívku, aby obrázek dokreslila, a potřeba estetická tak vytěsní z vědomí žačky potřebu matematickou.

4. Rozmístění prvků souboru. Například evidovat čtyři srdíčka rozmístěná jako

oka na hrací kostce je výrazně snazší než evidovat čtyři srdíčka rozházená, z nichž třeba dvě jsou různě natočena. Děti si počty ok na stěnách hrací kostky fixují jako jejich konfiguraci (poznají číslo zprvu jako obraz, který tvoří rozmístění ok – obdobně u domina).

M10: I velká čísla jako 100, 1000, dokonce 10000 mohou být znázorněna obrázkem. V polské učebnici pro třetí ročník autorů Z. Semadeniho a A. Demby je na s. 98 ve čtvercovém rámu o straně 111 mm nakresleno 10 000 teček uspořádaných po stovkách. Každá stovka je složena ze 4 řádek o 25 tečkách. Obrázek jsem ukázal dívkám ve třetím ročníku ZŠ Otokara Chlupa v Praze a dívky se pokusily stejný obrázek nakreslit. I když se jim to nakonec nepovedlo, poměrně hodně se toho o struktuře čísla 10 000 naučily.

34 Příběh
Jedna čepice a jedny brýle – nelze sčítat[46]

Po obrázcích, které jsou zmíněny v příběhu 33, následují v F1/1 obrázky[47], na kterých je třeba sčítat prvky heterogenního souboru. První takový obrázek obsahuje čepici a brýle.

Žák Radim dal do prostoru pro zápis na jednu stranu čárku a spojil ji s čepicí a na druhou stranu čárku, kterou spojil s brýlemi. Na otázku, kolik je zde věcí, řekl „jedna čepice a jedny brýle“. Když na požádání učitelky řešení ukázal třídě, jiný žák řekl: „To musíš sečíst, jako že dvě. (Obr. 14)

Na to učitelka řekla, že obě řešení jsou dobře, ale že při počítání věcí na těchto obrázcích nebudeme hledět na to, co to je, ale jen kolik toho je – a zde jsou dvě věci. Slovo věci řekla důrazně. Žáci to přijali bez protestů.

Problém vyvstal opět, když o několik stran dále bylo v učebnici třeba sčítat dva zajíce a jednu lišku. Jedna dívenka se bála, že po sečtení liška zajíce sežere. Většina žáků ale opakovala učitelčina slova: „Koukáme jen, kolik toho je.“

Analýza příběhu 34
K položkám M1 až M5 ani M10 nepřináší příběh nic nového.

M6: Radim čepici a brýle nesečetl, protože neznal společné jméno pro oba objekty. Slovo „věci“ jej vůbec nenapadlo. Heterogenita daného souboru je příliš veliká.
M7 a M9: V učebnici byl zde skok. Je třeba začínat s mírně heterogenními soubory, tj. takovými, kde žák zná společné pojmenování pro všechny prvky souboru.

K tomu osobní zkušenost. Můj šestiletý syn na otázku, kolik lidí žije v chaloupce u trpaslíků, odpověděl „sedm trpaslíků a jedna Sněhurka“. Moji odpověď „osm lidí“ odmítal. Připustil ji až asi po měsíci, když sám zjistil, že dvě holky a tři kluci je pět dětí, že kočka, pes a dvě kozy jsou čtyři zvířata, že čtyři židle a stůl je pět kusů nábytku apod.

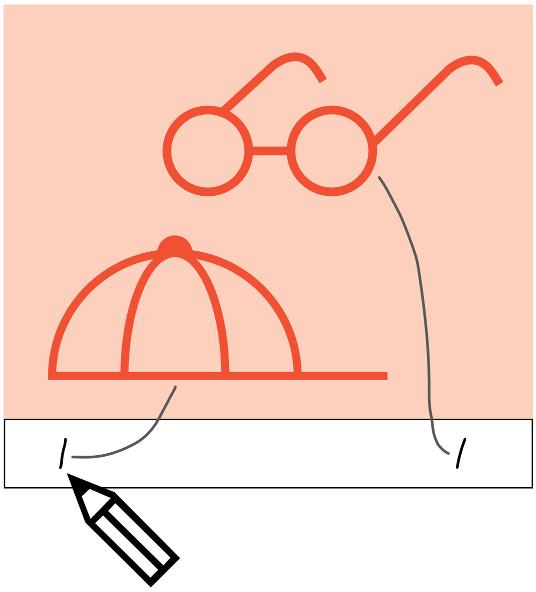
Edukačně úspěšná se ukázala následující úloha.

46
Viz též HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*, op. cit., s. 147.

47
HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika: pro 1. ročník základní školy* 1, op. cit.

48
Převzato z HEJNÝ, Milan. Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně, op. cit., s. 144.

Obr. 14



Úloha 6

Podívejte, co všechno měl Honzík v kapsách. (Na obrázku jsou papírové kapesníky, píšťalka, 3 kaštany, skleněná kulička a malý mončičák.) Kolik tam měl věcí?

I když jsou to věci různorodé, je zde něco, co z nich dělá jediný soubor – je to majetek Honzíka.

M8: Podobně lze tvořit heterogenní soubory zvuků, pohybů nebo zvuků + pohybů.

3.3.2 Stav vyjádřený počtem objektů pomíjivých nebo pomyslných

Didakticky důležitá jsou pomíjivá čísla. Úhozy hodin, tlesknutí, kroky, které udělám nebo góly, které dáme soupeři. Všechny tyto jevy jsou pomíjivé. Když pominou, zůstávají pouze v naší mysli nebo na papíře, pokud jsme si o tom udělali záznam. S pomíjivými čísly pracují žáci v prostředí Krokování.

35 **Příběh**
Šimon krokuje, Sabina počítá i přísuny

Žák Šimon stojí na krokovacím pásu a dostane příkaz: „Tři kroky dopředu, začni, teď." Udělá tři kroky způsobem krok a přísun. Třída do rytmu tleská a skanduje: „Jeden, dva, tři." Sabina tleská jak na krok, tak na přísun, ale nic nepočítá. Tleskne tedy šestkrát. Učitelka se ptá Sabiny, proč tleskala i na přísun. Sabina sama udělá krok a přísun. K tomu si tleská a počítá: „Raz, dva." Šimon oponuje: „To je ale jen jeden krok. To dohromady." Učitelka: „Podle Šimona se jeden krok skládá ze dvou pohybů, z vykročení a přísunu." Šimon: „A to je dohromady jeden krok. To je druhý (Šimon krokuje) a to třetí." Sabina: „Aha."

Analýza příběhu 35
M1–M3: Číslo „tři" zazní z úst učitelky a žáci je uloží do paměti.
M4 a M5: Šimon číslo prezentuje pohybem, všichni žáci číslo evidují zrakem a též tleskáním a hlasem.
M6 a M7: Pro Sabinu je „krok" pohyb jednou nohou. Pro Šimona je to přesunutí se na další značku. Překážka, která se objevila, má komunikační charakter. Odstraněna je vyjasněním konvence – za krok budeme považovat nikoli pohyb, ale přesunutí se na další značku.
M8 a M9: Proces krokování bude realizován chozením po schodech a prováděním vícečíselných pokynů typu: „2 kroky dopředu, 3 kroky dozadu, 1 krok dozadu a 4 kroky dopředu, začni teď." Zkušenosti z druhých a třetích ročníků ukazují, že k tomuto prostředí se žáci vrací, aby spočítali nebo překontrolovali složitější výpočty zejména se zápornými čísly.
M10: Prostředí přináší žákům první zkušenost se zápornými čísly. I když se zde ještě o minus jedné nemluví, mluví se o kroku nebo o krocích dozadu. To je předpojem záporného čísla.

36 **Příběh**
Nákup nanuků[48]

Dědeček jde s vnučkou Aničkou do obchodu. Dívka loudí na dědečkovi nanuk. Dědeček souhlasí: „Dobře, ale koupíme pro každé dítě jeden nanuk, i pro Aleše a Anežku." Posledně jmenované děti jsou teď na návštěvě u Aničky. Dívenka počítá na prstech: „Já, Alice, Adam, Aleš, Anežka, pět; koupíme pět nanuků." Ukazuje dědovi pět prstů ruky. Děda souhlasí. V obchodě z mrazicího pultu Anička vybírá do košíku nanuky a opakuje jména v jiném pořadí: „Já, Alice, Anežka, Aleš, Adam." Nanuky v nákupním košíku opět přepočítá. Tentokrát ale říkankou: „Jeden, dva, tři, čtyři, pět." Obrátí se na dědu a povídá: „Už mám pět nanuků."

Analýza položek M1 až M5

M1: Číslo 5 je prezentováno zprostředkovaně, souborem dětí, do něhož patří i Anička.
M2: Protože číslo není dáno přímo, není vnímáno žádnými smysly. Je uloženo v dlouhodobé paměti Aničky. Mluvíme o čísle *pomyslném*.
M3: Záznam čísla je složitý. Nejprve vyjmenováním prvků (proces) je celý soubor reprezentován pomocí prstů a stanoven na 5 prvků (koncept). Následně je v obchodě vyjmenování prvků opakováno a soubor dětí je reprezentován souborem nanuků v nákupním košíku. Nakonec je soubor nanuků kontrolován, zda jich je opravdu pět.
M4: Na záznamu se podílí počítání a manipulace.
M5: Cílem, resp. výsledkem aktivit dítěte je zjištění počtu prvků zcela nedostupného souboru.

Položky M6 a M7 se neobjevily.

Analýza položek M8 až M10.

M8 (M1): Číslo pět je v příběhu reprezentováno mnoha způsoby:

- souborem pěti dětí; soubor je uložen v paměti Aničky a je dívkou uváděn dvakrát, a to v různém pořadí;
- pěticí prstů dívky;
- číslem „pět" vysloveným Aničkou;
- souborem pěti pohybů, jimiž z mrazicího pultu dívka vybírá nanuky do košíku;
- souborem nanuků v nákupním košíku.

M9: Předchozí stadium jsme evidovali také v příběhu 31 (Jitka si hraje s panenkami), kde byly objekty jmenovány, ale zprvu nebyly propojeny s počtem. Následné stádium bude snížení přítomnosti sémantiky. Dívka po vyjmenování pěti dětí nahradí tento soubor počtem pět a u výběru nanuků nebude děti jmenovat.
M10: Počet uložený ve vědomí žáka souborem individuí nenabízí žádné rozšiřování číselného oboru.

3.3.3 Veličina

Veličinou je například délka, hmotnost, objem. Mohli bychom říci, že veličinou nebo mírou nazýváme to, co měříme pomocí nějaké jednotky: metr, centimetr, litr, gram, hodina, Kč, hektar, 1°, km/h...)[49]. Hodnotou veličiny je číslo plus jednotka, tedy kupříkladu 5 m, 4 kg, 2 l (2 litry). S veličinami se dítě setkává již v předškolním věku a některé děti docela dobře rozumí mincím. Peníze jsou asi nejvhodnějším prostředím pro porozumění číslu jako hodnotě veličiny. V prvním stadiu ale dítě penězům rozumí pouze v kontextu počtu, nikoli veličiny. Pěkně to dokumentuje příběh, který nám napsala K. Hošková.

37 Příběh
Dvě mince, tři koruny[50]

U pokladny jsem platila 203 Kč. Prodavačce jsem dala dvě stovky a dvě mince – korunovou a dvoukorunovou. Řekla jsem: „A tady jsou tři koruny." Můj třiapůlletý syn, který seděl v nákupním košíku, sledoval naši rozmluvu. Nahlas zvolal „ukaž" a chtěl vidět drobné, které podávám prodavačce. Ukázala jsem mu na dlani ty dvě mince. On protestoval: „Jsou dvě." Změnila jsem tedy dvoukorunu za dvě korunové mince a ukázala na dlani tři korunové mince. Hoch je přepočítal a byl spokojen. Doma jsem se snažila synovi vysvětlit, co je dvoukoruna. Nevím, jestli to pochopil. Asi ne, protože zájem o můj výklad nejevil.

49
Tak jako jsou jednotkami délky například metr [m], kilometr [km], centimetr [cm]..., mohli bychom při jisté volnosti řeči uvažovat i o jednotce počtu – tou je jeden kus. I zde existují větší jednotky – krabička (šesti, deseti) vajec, basa piv; historicky tucet, kopa.

50
Převzato z HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*, op. cit., s. 154.

51
Předpona deka-, která v současné fyzikální terminologii nevystupuje, se v životě používá ve vazbě typu „10 deka salámu", což je nešťastné, protože zde není slovo celé, dekagram. Žákům můžeme říct, že slovo deka má přesně znít dekagram a pak je to deset gramů. Doporučujeme slovu se vyhýbat.

Analýza příběhu 37

M1: Číslo „tři“ vyslovila matka a na její dlani se ocitly dvě mince.
M2–M4: Hoch má potřebu poznávat čísla. Informace získaná sluchem a informace získaná zrakem jsou v rozporu, protože hoch zatím vnímá pouze počet. O finanční hodnotě veličiny asi nemá žádnou představu.
M5: Hoch prověřuje soulad akustické a vizuální informace a ukazuje na chybu.
M6: Nelze mluvit o chybě hocha, protože v jeho vědomí jsou čísla 2 a 3 dobře pochopena, a to na tom stupni vývoje, kterým teď hoch prochází.
M7: Matčin pokus vysvětlit doma synovi hodnotu peněz byl neúspěšný, protože v této chvíli syn neměl potřebu takového poznání. Nadějnější by bylo použít dramatizace a zahrát si se synem na obchod. Kdyby o tuto hru měl zájem, byl by jeden z nich prodejcem a druhý kupujícím. Nejprve by se platilo jen korunovými mincemi a pak by se matka pokusila zavést i dvoukorunovou minci.
Za nejrozumnější jednání matky považujeme nic neurychlovat a vyčkat, až hoch bude mít sám o hodnotu peněz zájem. Jednou k tomu dojde, ale je málo pravděpodobné, že se mamince povede tento okamžik zachytit. Obyčejně u vývojových posunů my učitelé nebo rodiče pouze zkonstatujeme, že dítě je již dále, než bylo minule, ale okamžik, kdy k posunu došlo, se nám povede zaznamenat jen zřídka.
M8: Situace, kdy v jediném objektu jsou přítomna dvě čísla – jedno jako počet a druhé jako hodnota veličiny –, jsou rozmanité, přičemž míra rozmanitosti závisí na volbě veličiny (například délku lze uvádět v poměrně bohatém spektru jednotek) i zvolené jednotky, pomocí které hodnotu veličiny uvádíme. Když jsem žákům ve čtvrtém ročníku vysvětloval, že značka pokutového kopu v kopané je od brankové čáry vzdálena 10,973 m, protože Angličané, kteří tuto hru zavedli, zvolili značku pokutového kopu ve vzdálenosti 12 yardů od brankové čáry, žáci těch 12 yardů vnímali jako počet, ale délku 10,973 m vnímali jako hodnotu veličiny (1 yard = 0,9144 metru). I my u některých veličin jejich hodnoty vnímáme, resp. označujeme jako počty. Řekneme „je mi deset“ a jednotku „let“ vypustíme; řekneme „vrátím se nejpozději v pět“ a jednotku „hodin“ vypustíme.
M9: První stadium vývoje vnímání vazby počet–hodnota veličiny uvedl příběh 37. Zde existuje pouze vnímání počtu. Jakmile se objeví schopnost dítěte vnímat jak počet, tak veličinu, resp. její hodnotu, dochází k postupné kultivaci tohoto vztahu, nejčastěji ve vazbě na peníze. Příkladem zde může být následující úloha.

Úloha 7

Koupil jsem si sešit za 8 Kč a platil jsem třemi mincemi. Kterými?

Cena je veličinou, konkrétní cena sešitu je hodnotou této veličiny, trojice mincí je počtem. Úloha má jediné řešení. Když ale budu platit 8 Kč čtyřmi mincemi, řešení budou již dvě. Když budu platit 11 Kč ne více než pěti mincemi, řešení budou čtyři. Zde úlohy vstupují do oblasti kombinatoriky.

M10: Veličina přirozeným způsobem vede na čísla desetinná i na zlomky. U teploměru se pak objevují i čísla záporná.

S veličinou jsou spojeny převody jednotek zejména u délek, objemů a hmotností. Pro některé žáky čtvrtého a pátého ročníku je to kámen úrazu. Učitelé ve snaze ulehčit žákům pamatování si předpon deci-, centi-, mili-, hekto-, kilo-…[51] věší na nástěnku ve třídě názornou přehlednou tabulku. Úspěšnost takové pomoci je problematická. Pomůže žákům vyřešit úlohy o převodech, ale nedá žákům vhled do těchto výrazů. Navíc žáci naučené vazby rychle zapomínají. V našem experimentálním vyučování jsme proces poznávání uvedených předpon rozprostřeli na dva roky a úspěšně jsme aplikovali dvě didaktické myšlenky:

1. Předpony zavádíme intuitivně, jednotlivě a postupně. Nejprve ty, s nimiž mají žáci nejvíce zkušeností: centi- (metr) a kilo- (metr a gram). Pak mili- (metr, gram, litr). Stále usilujeme o to, aby měl žák pod použitými slovy jasné představy.

2. Předpony, které mají žáci již částečně zažité, vkládáme do časových údajů, kde se běžně nepoužívají. Ilustrací takové situace je následující úloha:

Úloha 8

(Je určena žákům čtvrtého ročníku.)

a) Žiješ již déle než 4 kilodny?

b) Kdy toto jubileum oslavíš?

c) Trvá vyučovací hodina více než 3 centidny?

d) Mé babičce je 80 let a dědovi je kiloměsíc. Kdo je starší? O kolik?

Řešení úlohy a) spočívá v převodu 4000 dnů na roky a měsíce. Několika žákům se tyto jednotky zalíbily tak, že sami přičinlivě vytvářeli podobné další úlohy a používali v nich i jednotky jako mikro-, piko- nebo giga-. Tito žáci byli záhy velkými experty na všechny podobné předpony.

Převody jednotek se objevují i při výměně peněz, například když měníme koruny na eura, dolary nebo libry. Pro některé žáky jsou zajímavé převody anglických palců, stop, yardů a mílí na naše jednotky. Anglické míry se sporadicky vyskytují ještě i dnes. Třeba kluky zajímá, že šířka fotbalové brány je 8 yardů a značka pokutového kopu je od středu brány vzdálena 12 yardů.

Náročné jsou veličiny, které měříme jednotkou složenou ze dvou jiných jednotek. Například „auto jelo rychlostí 60 km/h", „voda protéká rychlostí 2 hl/min", nebo „naše škola dostala od sponzora rekreaci v rozsahu 100 žákodní". To značí, že škola může poslat na rekreaci 10 žáků, každého na 10 dní, nebo 10 žáků, každého na 7 dní, a ještě 5 žáků, každého na 6 dní, anebo 20 žáků, každého na 5 dní, apod.

Nakonec zmíníme některá slova nebo úsloví, která používáme jako jednotky běžného života. Tucet značí 12, kopa je 60 a veletucet je 144. Týden je 7 dní a pracovní týden jen 5. Rok je 12 měsíců nebo 365 dní, ale přestupný rok je 366 dní. Hokejový tým může být chápán jako šestice hráčů na ledě nebo jako všech asi 22 hráčů, kteří nastupují do utkání. Ze lžičky kávy udělám jeden hrnek slabé kávy, ze tří lžiček jeden hrnek silné kávy.

Některé z těchto „jednotek" jsou nejednoznačné až nejasné. To bývá příčinou, proč jsou z učebnic matematiky vypouštěny. Podle našeho názoru je tyto „jednotky" vhodné občas použít, aby žáci v diskusi rozebrali hrozící úskalí a nejasnosti odstranili. Přispívá to k rozvoji kritického myšlení žáků i propojení školní matematiky s reálným životem. V prvním díle učebnice pro druhý ročník je na s. 46 recept[52] pro jeden kakaový moučník, k jehož výrobě potřebujeme 1 máslo, 1 hrnek vody, 2 hrnky cukru, 2 lžíce kakaa, 4 vajíčka, 2 hrnky polohrubé mouky a 1 prášek do pečiva; úkolem je zjistit, kolik čeho potřebujeme k výrobě dvou, resp. tří moučníků.

3.3.4 Operátor

Čtyři typy operátorů lze organizovat do dvourozměrné tabulky (Tab. 5):

Podíváme-li se na ilustrativní věty z tabulky 5, vidíme, že z jazykového hlediska je pro aditivní operátor příznačná předložka „o" a pro multiplikativní operátor slovo „násobný" nebo použití zlomku, případně procent. Operátor porovnání bývá spojen s adjektivem, přesněji s komparativem. Operátor změny bývá spojen se slovesem. Tato konstatování, podobně jako více dalších, nelze chápat jako zcela jednoznačná. Věty „Od rána se teplota zvýšila o 5 °C" a „Teď je o 5 °C více než ráno" říkají totéž, ale první to vyjadřuje pomocí změny, druhá pomocí porovnání.

52
HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. Matematika pro 2. ročník základní školy 1, op. cit., s. 46..

53
Průvodce na Petřínské rozhledně někdy sděluje, že kdybychom počítali výšku člověka stojícího v nejvyšším místě rozhledny nad hladinou řeky, byli by na tom Pražan a Pařížan zhruba stejně.

Operátor popisuje vztah dvou stavů nebo proces odehrávající se mezi nimi. Když se jedná o stavy dvou různých objektů, lze mluvit jen o porovnání, když se jedná o dva stavy jednoho objektu v různých časech, lze mluvit o porovnání nebo o změně. Situaci popsanou operátorem změny můžeme vyjádřit operátorem porovnání; na každý operátor změny lze hledět jako na operátor porovnání, nikoli naopak.

Operátory dělají potíže nejen žákům na prvním stupni, ale i, ba zejména, některým žákům na druhém stupni. Kořeny potíží se ale tvoří na prvním stupni, dokonce již v prvním ročníku.

Proč je práce s operátorem náročnější než práce se stavem nebo adresou? Číslo jako stav nebo adresa je soběstačné. Informace „Jan Werich se narodil v roce 1905“, nebo „Krychle má 6 stěn“ jsou jasné. Řeknu-li ale, že Ema je o 2 cm vyšší než Kim, pak číslo 2 je zde propojeno na dvě další čísla, na výšku Emy i výšku Kima. Tato dvě další čísla jsou tedy v operátoru porovnání *virtuálně přítomna*. Žák může mít pocit, že vazbě o *2 cm* vyšší nelze rozumět, pokud aspoň jedno z virtuálně přítomných čísel nezná. Stejně i operátor změny, například počet cestujících, kteří na zastávce ubyli nebo přibyli, poukazuje na dvě další čísla: na stav před změnou a stav po změně. Čísla virtuálně přítomná jsou mrtvé parametry dané situace, ale žák je může vnímat jako potřebné. To mu znesnadňuje vhled do situace. Ilustruje to následující příběh.

Tab. 5

OPERÁTOR	aditivní	multiplikativní
porovnání	Tetička bydlí o 3 podlaží výše. Je o 5 °C více, než bylo ráno.	Mám dvojnásobnou hmotnost hmotnosti syna. Výška pražské rozhledny je 1/5 výšky Eiffelovky.[53]
změny	Zhubl o 5 kg. Od rána se teplota zvýšila o 5 °C..	Chomout umožnil až pětinásobné zvýšení tažné síly koně. Tlak v kotli klesl na polovinu.

38 Příběh
Kolik přibylo Borisovi do prasátka?

Pětiletý Boris si začal střádat do prasátka. Už měl něco nastřádáno a babička mu přidala 3 Kč. Děda mu řekl: „Já ti teď přidám ještě dvě koruny; řekni, kolik jsme ti s babičkou přidali?“ Hoch chvíli uvažoval a pak řekl: „Já nevím, kolik jsem tam měl.“ Děda řekl: „Myslím, že jsi tam měl již čtyři koruny.“ Boris na prstech počítal 4 + 3 + 2 a řekl: „Mám tam devět korun.“ Děda řekl: „To ano, ale já bych chtěl vědět, kolik jsme ti my dva, babička a já, přidali.“ Děda viděl, že hoch nechápe. Proto natrhal papírky jako koruny, oddělil 4 papírky a řekl: „To jsou ty čtyři koruny, které již v prasátku byly.“ Hoch k nim přidal tři a řekl „babička“, pak přidal dva, řekl „ty“ a opět vše spočítal a řekl „devět“. Děda upřesnil otázku: „Které peníze jsme ti přidali my s babičkou?“ Vnuk vyčlenil tři babiččiny a dva dědovy papírky a řekl: „Tyto.“ Děda: „A těch je kolik?“ Hoch je spočítal a řekl „pět“.

Komentář k příběhu 38

Příběh ukazuje, jak je pro dítě, které již dobře počítá stavy, náročné pracovat s operátory změny. I když vnuk nakonec kýženou pětku našel, bylo v jeho řešení více dědečkova úsilí než hochova objevování. Dědeček měl hochovi dát nejprve několik podobných úloh s operátory porovnání, neboť ty jsou snazší. Až později mu dát úlohu z příběhu.

Proč jsou úlohy s operátory porovnání snazší? Operátor porovnání je statický a dá se často uchopit obrázkem. Například situaci *Ema je o 2 cm vyšší než Kim* nakreslím docela snadno. Naproti tomu dynamickou a pomíjivou situaci, jakou je ta popsaná v příběhu 38, nebo situaci *„z autobusu vystoupili 3 lidé“*, již tak snadno nakreslit nelze (zejména když je v úloze propojena na další operátory změny).

54
HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*, op. cit., s. 47 a 50.

3.3.5 Frekvence (četnost)

V učebnicích matematiky pro první stupeň se úlohy, které mluví o frekvenci, téměř nevyskytují; jejich četnost je velice malá. Ovšem jev frekvence je závažný, neboť je propojen na tři další oblasti matematiky, které je žádoucí zakládat již na prvním stupni. Jsou to periodicita, rytmus a statistika.

Periodicita se objevuje v prostředí Řady, které se lámou (například úloha 6 z F3;47, 5 z F3;50[54]) a v prostředí Sousedé, z něhož je následující úloha. Samozřejmě není to úloha první. Žáci již několik podobných a kratších úloh řešili.

Úloha 9
(Cvičení 3c z F3;35.) Doplň tak, aby byl součet každých tří sousedních čísel 7.

Obr. 15a

		2																1

Žáci řeší tyto úlohy metodou pokus–omyl. Po jisté době objeví, že se čísla pravidelně opakují.

Obr. 15b

1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1

Je zajímavé, že i když žáci periodicitu prostředí Sousedé objeví, nedovedou ji ihned využít k řešení úloh. Několik dní nebo týdnů to trvá, než některý žák ukáže, jak periodicitu využít. Těchto zkušeností nabývají žáci již od prvního ročníku. Pokud začali s touto matematikou pracovat až ve třetím ročníku, je třeba jim nejprve dát úlohy z ročníků nižších. Objev využití periodicity v případě úlohy 9 může vypadat takto: Žák „přestěhuje" jedničku z pravého konce řádky na levý konec tak, že ji postupně píše do každého třetího pole, jak vidíme na obrázku 15c.

Obr. 15c

1		2	1			1			1			1			1			1

Jakmile má žák vedle sebe čísla 2 a 1, je úloha vlastně vyřešena. Viděli jsme žáka, který nejprve doplnil všechny dvojky. Tedy pro frekvenci čísla dvě platí „každé třetí". Pak doplnil všechny jedničky (také v sérii jedniček je každé třetí číslo jedna) a do zbylých prázdných oken doplnil čtyřky. Tedy jedničky i čtyřky mají stejnou frekvenci jako dvojka, i na ně se vztahuje vyjádření „každé třetí".

Jev frekvence je přítomen v každém pravidelném rytmu (předmětném, vizuálním, akustickém nebo kinestetickém). Je tomu tak například ve výpovědích „Vzdálenost sousedních stromů v této aleji je 10 metrů" nebo „Hodiny bijí každou čtvrthodinu" nebo „Každý čtvrtek máme výtvarný kroužek". Jev frekvence se objevuje i mimo rytmus. Sem náleží výroky jako „Každý pátý los vyhrává" nebo „V roce 2011 žilo v Čechách dvakrát více Josefů než Věr" nebo „Písmeno ‚k' má v českém textu asi třikrát větší četnost než písmeno ‚ř'". Všechny tyto situace mají statistický charakter.

Číslo jako identifikátor

3.4

Výpověď „Milan sedí na tribuně na sedadle 318 a jeho bratr, brankář Eda, má dres s číslem 12“ obsahuje dvě čísla, dva identifikátory. Jejich významové ukotvení má odlišný charakter. Čísla sedadel na tribuně tvoří strukturu. Jestliže Milan sedí na sedadle 318, pak divák, který sedí vedle Milana, sedí na sedadle 317 nebo 319. Naproti tomu z informace „Eda má dres s číslem 12“ neumíme říct nic o hráči s číslem 13. Nevíme, zda je to stoper, nebo útočník. Nevíme ani to, zda hráč s číslem 13 je na hřišti, nevíme ani, zda vůbec toto „nešťastné“ číslo není z dresů vyřazeno. Čísla dresů netvoří strukturu.

Identifikátorem je buď *adresa*, nebo *jméno*. Adresa určuje lokalitu (místo), čas, objekt nebo událost. Adresy tvoří strukturu, jména ji netvoří. Matematicky zajímavé jsou jen adresy. Ty jsou buď *lineární*, pokud směřují stále dopředu, nebo *cyklické*, pokud „chodí“ dokola.

Přehledně situaci popisuje tabulka 6 (Tab. 6).

Tab. 6

IDENTIFIKÁTOR		Ilustrace		Otázka
		času	místo / objekt / pořadí	
Adresa (A)	lineární (AL)	Giordano Bruno byl upálen 17. února 1600 v Římě. Rokem 2001 začalo 3. tisíciletí.	Bydlíme v pokoji číslo 514. Jsem na 8. kilometru dálnice. Tomáš doběhl třetí.	Kdy? Kde?
	cyklická (AC)	Pepa se narodil v 11:30 hodin. Anna má svátek dne 26. července. Třetím dnem týdne je středa.	Na Sněžku nás vyvezla kabinka číslo 7. Na pondělí vyšla data 5, 12, 19 a 26.	
Jméno		Tramvaj číslo 3. Telefonní číslo sekretářky je 233 154 111.		

3.4.1 Jméno versus adresa

Následující příběh úsměvným způsobem poukazuje na rozdíl mezi adresou a jménem.

39 **Příběh**
V Motole se ptá pan Vesničan pana Pražáka, jak se dostane na Výtoň

Pan Pražák ochotně radí: „Pojedete čtyřkou až na Palackého náměstí a tam přesednete na trojku a pojedete proti proudu Vltavy.“ Pan Vesničan si říká pro sebe „Čtyřkou a pak trojkou? Proč tak? To já pojedu raději rovnou sedmičkou.“ Pan Vesničan si počkal na sedmičku a ta jej dovezla na Výtoň bez přestupu.

Komentář k příběhu 39
Představa, že s čísly tramvajových linek lze smysluplně aritmeticky operovat, je úsměvná. Na podstatě označení linek by se nic nezměnilo, kdyby zde místo čísel byla písmena (jak je tomu u metra) nebo kdybychom tato čísla libovolně proházeli. Kdybychom vzájemně přejmenovali linky 3 a 7, pak by deformovaná úvaha pana Vesničana kolabovala.

Sofistikovanější situaci o hranici mezi adresou a jménem uvádí následující příběhy.

40 **Příběh**
Telefonní seznam podniku

Telefonní seznam podniku má osm položek abecedně seřazených: garáž 02, osobní 22, podatelna 20, ředitel 13, sekretářka 04, ústředna 21, vrátnice 11, ekonomické 12, personální 03.

Telefonními čísly vnitřních linek podniku jsou kódy jednotlivých oddělení. Mají podobu jmen. Číslo 04 je zde kód („telefonní jméno“) sekretářky. Nápis SEKRETÁŘKA na dveřích její kanceláře je její funkční jméno. Chci-li mluvit telefonem se sekretářkou, vytočím 04. Toť vše. Nic dalšího se k číslu 04 nevztahuje. Ani poloha její kanceláře v budově, ani významnost postu. Když číslo zapomenu, musím jej opět vyhledat v seznamu.

Jestliže však zřizovatel linek měl v přiřazování čísel systém daný polohou místnosti v budově (první číslice je 2, resp. 1, resp. 0, jestliže je místnost v západní, resp. střední, resp. východní části budovy; součet obou číslic zmenšený o 1 určuje podlaží místnosti), jsou pro něj tato čísla adresami. Pro toho, kdo tuto souvislost nevidí, jsou to jména. (Tab. 7)

Tab. 7

	Osobní 22	Ředitel 13	Sekretářka 04		3. podlaží
západ	Ústředna 21	Ekonomické 12	Personální 03	východ	2. podlaží
	Podatelna 20	Vrátnice 11	Garáž 02		1. podlaží

Rodné číslo občana ČR je desetimístné. Prvních 6 číslic je adresou. Je to datum narození (rrmmdd). Poslední čtyři číslice jsou jménem, které ale pro některé úředníky může být též adresou.

V životě se běžně setkáváme s adresami, jejichž struktura není dokonalá. Ilustruje to následující příběh.

41 **Příběh**
Narušené adresování v chodbě hotelu

Vracím se do svého hotelového pokoje číslo 511. Na chodbě je tma. Nouzové světlo mi dovolí přečíst jen čísla dvou krajních pokojů: 501 a 502. Hmatám podél zdi a počítám dveře, kolem kterých procházím: 503, 504... 511. Jsem u svého pokoje. Jenže klíč do zámku nejde vsunout. Znejistím a škrtnu sirkou, abych zjistil, že na dveřích, do nichž se dobývám, je číslo 510. Sousední pokoj je můj. Ráno pak zjišťuji, že mezi pokojem 506 a 507 byly neočíslované dveře WC. To byla příčina mého omylu.

Komentář k příběhu 41
Příběh popisuje častou situaci, kdy vazba mezi souborem objektů a řadou čísel má nedostatky. Výzva žákům, aby hledali podobné narušení adresování, padne většinou na úrodnou půdu aspoň u několika žáků třídy. Nejčastěji žáci uvádějí čísla domů na ulici.

Zajímavé narušení adresování, které odhalili žáci, je datování našeho kalendáře. V něm schází rok 0. Po roce -1 hned následuje rok +1. Velký římský básník Publius Ovidius Naso (-43 až +17) žil nikoli 17 + 43 = 60 let, ale o rok méně. (Viz též komentář k příběhu 42.)

3.4.2 Lineární adresování, číselná osa a stupnice

Standardním teoretickým modelem lineárního adresování je číselná osa. Na ní má každé místo přesně určenu souřadnici, a naopak každé číslo je souřadnicí jednoho místa. V reálném světě nacházíme modely číselné osy ve formě lineární stupnice. Například krejčovský metr, teploměr, tlakoměr, váha, výškoměr, tachometr, fonoměr... Dodejme, že digitální teploměr, digitální váha již měří bez stupnice. Ukážou pouze jedno číslo.

Lineární stupnice, na rozdíl od číselné osy

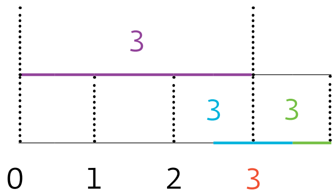
- je vázána na svět věcí, tj. je významově ukotvena,
- je z obou stran omezena
- a má jistou rozlišovací schopnost.

Lékařský teploměr měří teplotu v rozmezí od 34,1 °C do 42 °C s rozlišovací schopností 0,1 °C. Řídicí panel výtahu má 9 tlačítek s čísly od -1 do 7. Kalendář je stupnicí času, pro každý rok jinou. Dny v něm mají více adres: dnes je „3. 6. 2012", tj. „162. den roku 2012", tj. „neděle 22. týdne roku 2012". Žádné z těchto čísel neoznačuje časový bod, ale časový interval 24 hodin. Podobně adresa „21. století" označuje 100 let trvající interval od 1. 1. 2001 až do 31. 12. 2100.

Specifickou stupnicí je věžák, na němž počítáme patra nebo podlaží. Jednak má svislou polohu, jednak zde nacházíme didakticky bohatý soubor jevů. Těm budeme v dalším textu věnovat hodně pozornosti.

Při používání číselné osy dochází někdy k nedorozumění, protože jedno číslo může mít až čtyři různé interpretace. Například číslem 3 jeden rozumí bod, jehož souřadnice je 3, druhý rozumí délku úsečky od bodu 0 k bodu 3, třetí rozumí dílek osy od bodu 2 k bodu 3, čtvrtý rozumí dílek osy od bodu 3 do bodu 4. (Obr. 16.)

Obr. 16



Každá z těchto interpretací má oporu i v jistém významovém kontextu. Když teploměr ukazuje 3 °C, pak číslo 3 vnímáme jako bod na stupnici. Když ve skoku dalekém skočím 3 m, vnímám číslo 3 jako délku úsečky mezi čárou odrazu a místem dopadu. Viz 4.2.3 Odčítání adres.

Stojím před věžákem. Na balkoně ve třetím patře je můj přítel. Jak v tuto chvíli vnímám pojem „třetí patro"? Je to úroveň podlahy bytu, v němž přítel bydlí? Nebo je to úroveň stropu tohoto bytu? Nebo je to celý byt, tedy prostor mezi podlažím a stropem? Když tuto otázku položíme žákům ve třetím ročníku, budou chvíli na rozpacích, protože o pojmu „třetí patro" zatím takto neuvažovali. Pak se ale pravděpodobně většina přikloní k poslední interpretaci. Tedy číslo 3 vnímají jako interval. Pro některé je to interval mezi body 2 a 3, ale pro jiné je to interval mezi 3 a 4. Tato nejednoznačnost má původ ve faktu, že patro či poschodí označují jen části domu nad přízemím. Ilustruje to následující příběh.

42 Příběh
Spor Cyrila a Cecílie o přízemí, patro a podlaží

Žáci v druhém ročníku řeší úlohu „Postav z krychlí pětipatrovou věž". Cyril udělá věž z pěti krychlí a Cecílie ze šesti. Cyril upozorní Cecílii, že tam má jednu krychli navíc. Cecílie odpoví, že naopak Cyrilovi tam jedna krychle schází, protože zapomněl na přízemí.

Komentář k příběhu 42
Pro žáka druhého ročníku je skutečnost, že pětipatrová věž má 6 krychlí, matoucí. Abychom se nedorozumění vyvarovali, používáme místo slova „patro" slovo „podlaží". Když bydlím v přízemí, bydlím v prvním podlaží. Věž, která má 5 podlaží, je sestavena z 5 krychlí. Při této terminologii má podlaha prvního podlaží úroveň 0 a strop prvního podlaží má úroveň 1. To je zároveň úroveň podlahy druhého podlaží atd. Při této interpretaci je úsek mezi body 4 a 5 pátým intervalem. Zde je možné vidět dobrou analogii – zviditelnění problému s nulou v již zmíněném narušeném adresování u historického datování. Po 31. prosinci roku minus jedna následuje ihned 1. leden roku plus jedna. Viz též komentář k příběhu 41.

Číselná osa je jevištěm pro prostředí Krokování a Schody. Následující dva příběhy se vztahují k tomuto prostředí.

43 **Příběh**
Dana a Derek na krokovacím pásu: značky a kroky

V první třídě stojí na krokovacím pásu Dana a tři kroky před ní Derek. Učitelka se ptá: „Jak jsou Dana a Derek vzdáleni od sebe? Žák Dušan řekne „Dvě značky".

Komentář k příběhu 43
Na nevhodnou otázku učitelky odpověděl Dušan v podstatě správně. Učitelka ale chtěla odpověď „tři kroky". Měla se ptát: „Kolik kroků má udělat Dana, aby stála vedle Derka?"

44 **Příběh**
Kdy bude Erik starší než Emil

Na procházce se ptám pětiletého vnuka Erika, za jak dlouho bude starší než jeho sedmiletý bratr Emil. Erik neví. Nakreslím hůlkou na zemi číselnou osu a čárkami označím na ni čísla 1, 2, ..., 9. Erik umí počítat do 10, číslice nepoužívá. Postavím Emila k číslu 7 a řeknu: „Tobě je sedm, tak tě postavíme na číslo sedm; tobě, Eriku, je pět a tak tě postavíme..." – hoch mi skočí do řeči „na pět" a již se sám na příslušnou značku staví. Pokračuji: „...teď jako že uplyne jeden rok a vy oba dva zestárnete o jeden rok, jo? Uděláte krok vpřed. Uvidíme, jak to bude tedy v příštím roce." Oba hoši udělají jeden krok kupředu. Erik ihned křičí „Nikdy. On bude pořád o dva roky napřed."

Komentář k příběhu 44
Erik dosud vnímal svůj věk jako počet, neboť již od tří let na otázku: „Kolik ti je?" – ukazuje věk na prstech.[55] Jednotkou věku je jeden rok, což je veličina, ale reprezentován je prstem, který ukazuje počet. Teď poprvé hoch vidí interpretaci věku pomocí *časové osy*. Věk je zde adresa místa. Proces plynutí času, pro Erika dříve těžko uchopitelný, se mění na pohyb po číselné ose a ten hoch chápe ihned. Skutečnosti „uplynul jeden rok" odpovídá pokynu „udělej krok dopředu".

Vraťme se ještě ke svislé číselné ose modelované věžákem. Když řeknu, že bydlím ve třetím patře, je číslo 3 spíše místem, nebo spíše pořadím? Na tuto odlišnost poukazuje následující příběh.

45 **Příběh**
Filip odpočítá patra a zmáčkne odpovídající tlačítko výtahu

Filip jde navštívit Felixe. Ten bydlí ve třetím patře. Filip se zastaví před domem a odpočítá si patra. Vidí, že na balkoně ve třetím patře se suší Felixovo tričko. Filip vstoupí do výtahu a zmáčkne knoflík u čísla 3.

Komentář k příběhu 45
Odpočítáním pater, tedy procesem, identifikuje Filip balkon třetího patra jako pořadí. Ve výtahu mačká knoflík u čísla 3, které je adresou místa, kam výtah pojede. Knoflík 3 zastupuje koncept. Tento rozdíl je pro odlišení pořadí a adresy příznačný: pořadí je vnímáno procesuálně, adresa konceptuálně.

Číselná osa hraje v rozvoji matematického myšlení žáka důležitou roli. Tím, že leží na překrytí aritmetických a geometrických schémat, je tlumočníkem mezi aritmetikou a geometrií. Je vstupní branou do analytické geometrie, se kterou se žák seznámí až na vyšším gymnáziu.

55
Téměř vždy však děti ve věku tří let (a pozor, nejen v tomto věku) ve skutečnosti ukazují gesto, jemuž nerozumí – stačí použít jinou kombinaci prstů než palec, ukazováček a prostředníček a přeptat se: „A tolik je ti taky?" (Pozn. ed.)

56
HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*, op. cit., s. 72–75.

57
Absolutní jednotku lze vyvodit ze struktury. Když zapomenu, jak je velký jeden stupeň, mohu si ho vytvořit.

58
Vezmeme papírovou ruličku (plášť válce) a na ni předem stejně daleko od sebe rovnoběžně s osou válce nakreslíme barevné značky pro čísla 0, 1, 2, 3, 4. Pro každé číslo použijeme jinou barvu fixy. Dobře se nám to bude vyměřovat na obou kružnicích, které jsou obvody podstav válce. Pak na ruličku několikrát kolem dokola namotáme niť, ta nám značky částečně zakryje. V místě každé značky protneme niť znovu čarou, přičemž v závislosti na dalším použití můžeme buď opakovat původní barevný rytmus, nebo zvolit pro vyznačení značek na niti barvu jedinou, třeba černou. Ke každé značce na niti nyní existuje barevné číslo a černé číslo. Po rozmotání nitě najdeme a označíme například černé číslo 17 a ptáme se, na které barevné číslo padne číslo 17. V daném případě na dvojku, o čemž se žáci mohou snadno přesvědčit opětovným namotáním nitě na ruličku. Po nějaké době alespoň někteří žáci sami přijdou na to, jak vypočítat, na které barevné číslo padne kupříkladu černé číslo 178 (padne na barevné číslo 3).

3.4.3 Cyklické adresování, ciferník a úhel

Standardním modelem cyklického adresování je *kružnice*. Od babylonských dob je dělena na 360 stejných dílů, *stupňů*. Stupeň je dělen na 60 *minut* a minuta na 60 *vteřin*: 1°= 60', 1' = 60''.

Žákův nástroj na měření úhlů je *úhloměr.* Tato stupnice měří velikosti úhlů od 0° do 180° po 1°. Nejznámější cyklickou stupnicí je *ciferník* hodin. Je dělen na 12 dílů, *hodin*. Hodina se dělí na 60 *minut*, minuta na 60 *sekund*: 1 h = 60 min, 1 min = 60 s. Na ciferníku je slovo „minuta" přítomno ve dvou kontextech. To někdy vede k nedorozumění.

46 **Příběh**
Časová a úhlová minuta

Ve čtvrtém ročníku žákyně Gabriela útočí na učitelku: „Tady v učebnici je napsáno, že jeden stupeň je 60 minut (dívka ukazuje nápis 1° = 60'). Jenže za 15 minut (ukazuje na hodinách) urazí velká ručička 90 stupňů. Tedy 6 stupňů za minutu (dívka píše 6° = 1'). Tak jak to vlastně je?"

Komentář k příběhu 46
Příčinou domnělé matematické nesrovnalosti je, že slovo „minuta" používáme jednak k měření času, jednak jako jednotku k měření velikostí úhlů. Gabriela oba tyto kontexty propojila pohybem velké ručičky na hodinách. Velká ručička urazí za jednu časovou minutu úhel 6°, tedy 6 × 60 úhlových minut, tj. 360'. Malá ručička se pohybuje 12krát pomaleji než velká. Malá ručička urazí tedy za jednu časovou minutu úhel 30', tj. půl stupně.

Nepovažujeme za vhodné na prvním stupni zavádět minutu jako šedesátinu stupně. O minutě doporučujeme mluvit pouze v časovém kontextu. Jedině se žákem, který sám projeví zájem o minutu jako úhlovou míru, je potřebné tento pojem diskutovat. Za důležité ale považujeme pracovat s ciferníkem hodin jako prostředím, na kterém se prolíná měření času a měření úhlu. K tomu vedou úlohy o času, který uplyne, když velká, resp. malá ručička urazí úhel 90° nebo 12° apod. Více úloh lze najít v učebnici F5;72 až 75[56].

Mezi cyklickou a lineární stupnicí jsou tři základní rozdíly:

Cyklická stupnice měří neomezeně. Ciferník hodin zobrazuje všechny hodiny minulé i budoucí. Lineární stupnice (třeba krejčovský metr) je omezená.

Cyklické adresování je nejednoznačné. Témuž číslu stupnice odpovídá nekonečně mnoho úhlů nebo časových okamžiků. (Značce pro 40° odpovídají i úhly 400°, -320°...). Lineární adresování je jednoznačné.

Cyklická stupnice má absolutní jednotku[57]. Například 1°= 1/360 kružnice. Lineární stupnice ji nemá.

Cyklické adresování je úzce propojeno na jev periodicity a tzv. modulární aritmetiku. Kdybychom pásek z obrázku 15b vystřihli a namotali jej na váleček tak, že by všechny jedničky padly na sebe, padly by na sebe i všechny dvojky i čtyřky. Toto namotání dobře ilustruje podstatu vztahu mezi periodicitou a cyklickým adresováním.

Když podobným způsobem „namotáme" číselnou osu na kružnici tak, že čísla 0, 5, 10, ... padnou na sebe[58], pak na sebe padnou i čísla 1, 6, 11, ... i čísla 2, 7, 12, ... i čísla 3, 8, 13,... Kdybychom namotávali číselnou osu na kružnici tak, že na sebe padnou čísla 0, 12, 24, 36, … , dostaneme v podstatě ciferník hodin. U ciferníku hodin platí, že 11 + 5 = 4, 4 × 5 = 8 apod. Je totiž 11 h + 5 h = 16 h, což na ciferníku hodin čteme jako 4 h, a 4 krát 5 h = 20 h, což na ciferníku hodin čteme jako 8 h. Jak už bylo uvedeno, můžeme si vyrobit, nakreslit nebo představit i jiné ciferníky než ty, na nichž se ručička vrací na stejné místo po dvanácti hodinách. Počítání s „namotanou číselnou osou“ matematici říkají modulární aritmetika. Srozumitelnější pro žáky je název ciferníková aritmetika.

V prvních čtyřech kapitolách jsme zkoumali představy žáků o různých významech čísla (sémantické představy žáků o čísle). V dalším textu se zaměříme na to, jak žák s čísly pracuje.

Práce s číslem

4

Na prvním stupni se žák setkává s operací sčítání, odčítání, násobení a dělení, dále s absolutní hodnotou a zaokrouhlováním a konečně s relacemi rovnosti, porovnávání a dělitelnosti.

Když mluvíme o práci s čísly, musíme vědět, v jakém číselném oboru pracujeme. Například rovnost $-2 + 5 = 3$ je smysluplná a platí v oboru celých čísel, ale v oboru přirozených čísel nedává smysl, neboť tam neexistuje -2. Podobně rovnost $\frac{6}{3} = 2$ je smysluplná a platí v oboru racionálních čísel (zlomků), ale v oboru přirozených čísel nedává smysl, neboť tam neexistuje $\frac{6}{3}$ (žák neví, co to je). Ovšem rovnost $6 \div 3 = 2$ je v oboru přirozených čísel smysluplná a pravdivá. Podobně je tomu i s rovností $7 \div 3 = 2\ (1)$, kterou chápeme jako jiný zápis rovnosti $7 = 3 \times 2 + 1$.

Tradičně bývá na prvním stupni kladen zvýšený důraz na nácvik operací. Mnoho učitelů je přesvědčeno, že jejich úkolem je dosáhnout toho, aby žák pátého ročníku bezpečně a rychle zpaměti sčítal i odčítal do 100, znal násobilku i výsledky inverzních operací dělení a s většími čísly zacházel pomocí spolehlivě nacvičených písemných algoritmů sčítání, odčítání, násobení a dělení se zbytkem. Uvedená edukační strategie zdůrazňuje význam paměti v učení se matematice. Podle našeho názoru je smyslem vyučování matematiky rozvoj intelektuálních schopností žáka, nikoli nácvik.

Poznámka editorky

Fakt, že důraz na rychlost jde proti rozvoji intelektuálních schopností, se netýká jen matematiky. Jedna z nejpokrokovějších autorek Margaret Donaldson (1978)[59] píše o výuce čtení:

Od okamžiku, kdy se začne s výukou čtení, může mít způsob, jímž se to děje, dalekosáhlý význam... *Proces*, jímž se dítě stává gramotným člověkem, může mít značný, ale obvykle netušený vliv na rozvoj dětské mysli. Nabývání gramotnosti může provázet podpora velice důležitých forem intelektuálního sebepojetí a sebekontroly... Klíčové je při tom poskytovat dítěti čas, nespěchat na ně... Důraz na rychlost a důraz na přemýšlení stojí proti sobě v jakémkoli věku. Chceme-li podpořit rozvoj dovednosti reflexe v raných stadiích vývoje dítěte, pak rychlost a jistota *nebudou* prioritou. Dítě, od kterého se očekává okamžitá reakce správným zvukem, kdykoli po něm střelíme izolovaným slovem..., nebude vůbec přemýšlet o možnostech interpretace. Pokud odpověď nezná, bude pod tlakem, aby odpověď *nějak* uhodlo; nebude mít zájem zamyslet se, reflektovat a uvědomovat si, co vlastně dělá[60].

Autorka zde zdůrazňuje význam kvality procesu a trpělivosti učitele při výuce čtení (kurziva je zde použita přesně podle originálu). Jak by tomu mohlo při výuce matematiky být jinak? Přesto i na vzdělávacích akcích zaměřených na výuku matematiky metodou genetického konstruktivismu si učitelé nezřídka sdělují různé hry a jednotlivé triky, jak zefektivnit výcvik v rychlých a přesných odpovědích – v představě, že cílem vyučování matematice je automatizace spojů, jíž se dosáhne pilným rutinním počítáním. To je zkratka, která vynechává to podstatné. Rutinní počítání má být *prostředkem* k prozkoumávání zajímavých problémů, automatizace spojů *vedlejším efektem* této činnosti.

59
DONALDSON, Margaret. *Children's Minds*. 1. vyd. Glasgow – [London]: Fontana Press, 1978, s. 97–98.

60
Once the teaching of reading is begun, the manner in which it is taught may be of far-reaching significance... The *process* of becoming literate can have marked – but commonly unsuspected – effects on the growth of the mind. It can do this by encouraging highly important forms of intellectual self-awareness and self-control... A key consideration will be whether the child is given time to pause... Speed and reflective thought are antithetical at any age. If one wants to encourage the development of reflective skills in the early stages, then speed and certainty will *not* be the things to stress. The child who is expected to respond by immediately making the right sound whenever an isolated word is shot at him... will not be considering possibilities of interpretations at all. If he does not know, he will be under pressure to guess wildly, not to pause and reflect and become aware of what he is doing.

61
Antisignálem je slovo nebo slovní spojení, které odkazuje na určitou operaci, přičemž k vyřešení úlohy je potřeba použít operaci opačnou. Příklad: Na výlet jelo 51 dětí, což bylo třikrát více než vloni. Kolik dětí jelo vloni? Přes výskyt slov „třikrát více" získáme odpověď dělením.

Společně s drtivou většinou mezinárodní komunity didaktiků matematiky jsme přesvědčeni, že k matematickému růstu žáka i k rozvoji jeho osobnosti podstatně více přispěje edukační strategie zaměřená na porozumění operacím a relacím a na porozumění situacím, v nichž se tyto operace a relace vyskytují.

Porozumění operaci znamená, že žák

- *rozumí smyslu operace*, tedy
  a) spolehlivě *vyřeší základní slovní úlohu* (termín je vysvětlen ve 4.1.1);
  b) pomocí dramatizace, manipulace nebo obrázku spolehlivě *uchopí úlohu s antisignálem*[61];
  c) *vytvoří dobrou slovní úlohu*, jejíž matematický model je dán;

- *umí operaci uskutečnit* (s menšími čísly mentálně, z hlavy, s většími písemně, počínaje druhým ročníkem umí používat kalkulátor); operace s menšími čísly postupně automatizuje;

- *rozumí písemnému algoritmu operace*, tj. ví, proč „to funguje"; zejména se jedná o přechod přes desítku.

Nejdůležitější je porozumění smyslu operace a nejméně důležité je porozumění algoritmu. Písemnému algoritmu žáci porozumí až později, někteří nikdy, ale to není závažné.

Porozumění relaci znamená, že žák

- *dovede o dvou číslech rozhodnout, zda jsou, nebo nejsou v dané relaci* (například rozhodnout, zda platí: $-5 < -6$; $6{,}3 < 6{,}30$; $6/3 < 2$; $4|16$; $3|210378$ (zde $A|B$ značí, že číslo B je dělitelné číslem A) apod.);

- *rozumí smyslu relace* (ví například, že když je $A = B$ a $B = C$, pak platí též $A = C$, nebo když $A < B$ a $B < C$, pak též $A < C$, nebo když $A|B$ a $B|C$, pak též $A|C$);

- *dovede rozhodnout o pravdivosti výroku*, který pracuje s dvěma výroky (kupříkladu zda z $A < B$ a $C < B$ lze něco nového vyvodit o číslech A, B a C, případně o číslech $A+C$ a B).

Sčítání

4.1

4.1.1 Žák rozumí smyslu operace

Porozumění sčítání diagnostikujeme trojicí indikátorů.

a) Žák spolehlivě vyřeší slovní úlohu na sčítání každého z jedenácti základních sémantických typů. Jsou uvedeny v tabulce 8. Pro žáka prvního ročníku se jedná o typy 01 až 05, pro žáka třetího ročníku jsou to i typy 06 a 07, pro žáka pátého ročníku všechny typy.

b) Žák pomocí dramatizace, manipulace nebo obrázku spolehlivě uchopí úlohu s antisignálem, ve které navzdory slovu, které napovídá odčítání, se výsledek najde sčítáním.

c) Žák umí vytvořit slovní úlohu, jejíž matematický model je 5 + 2 = ? (žák prvního ročníku zvládne jeden typ, žák pátého ročníku zvládne každý z typů 01 až 07).

Pro indikátor a) je tedy třeba použít tabulku 8, která uvádí 11 základních typů sémantických situací operace A + B = C, v níž se vyskytuje číslo jako stav (S), jako aditivní operátor porovnání (OP) či operátor změny (OZ) a jako adresa (A): (Tab. 8)

Tab. 8

TYP	A	B	C	
01	S	S	S	1. ročník
02	S	OZ	S	
03	S	OP	S	
04	A	OZ	A	
05	A	OP	A	
06	OZ	OZ	OZ	3. ročník
07	OP	OP	OP	
08	OZ	OP	OZ	5. ročník
09	OP	OZ	OZ	
10	OP	OZ	OP	
11	OZ	OP	OP	

Každý z 11 typů tabulky má podtypy. Kupříkladu u typů 01, 02 a 03 může být číslo, které je stavem, zároveň počtem nebo veličinou (délky, obsahu, objemu, hmotnosti, času, teploty, popřípadě rychlosti, tlaku...). I tyto podtypy mají ještě jemnější dělení. Například podtyp stavu určeného počtem („S je počítáno na kusy“) se může dělit dále na případ *homogenní* (všechna tři S vystupující v úloze jsou stejná – třeba děti) nebo *heterogenní* (jedno S jsou hoši, druhé S jsou dívky a třetí S jsou děti). Podobná různorodost existuje i u operátorů a adres.

Dvě ilustrace náročnějších úloh osvětlí didaktickou náročnost úloh typu 08 až 11.

Úloha 10

(typ 08, resp. 09) Adam a Boris bydleli ve stejném podlaží paneláku. Letos se oba stěhovali. Adam o 3 podlaží nahoru, Boris teď bydlí 2 podlaží nad Adamem. O kolik podlaží nahoru se stěhoval Boris?

Označíme OZ_A operátor změny polohy Adama, OZ_B operátor změny polohy Borise a OP_{BA} operátor porovnání polohy Borise a Adama. Existují dva různé způsoby uchopení úlohy v závislosti na pořadí uchopení čísel 2 a 3.

První uchopení je typu $OZ_A + OP_{BA} = OZ_B$. Začne přestěhováním Adama a pokračuje porovnáním současných adres obou hochů.

3 je OZ_A: teď se Adam přestěhoval o 3 podlaží výše, než původně bydlel.

2 je OP_{BA}: teď Boris bydlí ještě o 2 podlaží výše než Adam.

→ $OZ_B = 5$: Boris se tedy stěhoval o 5 podlaží nahoru.

Druhé uchopení je typu $OP_{BA} + OZ_A = OZ_B$. Vychází z finálního stavu „teď“, kdy je Boris 2 podlaží nad Adamem. Pak se podíváme, odkud přišel Adam, a ze stejného podlaží přestěhujeme Borise.

2 je OP_{BA}: teď Boris bydlí o 2 podlaží nad Adamem.

3 je OZ_A: Adam se ale stěhoval o 3 podlaží výše.

→ $OZ_B = 5$: Boris se tedy stěhoval o 5 podlaží nahoru.

Úloha 11

(typ 10, resp. 11) Od ledna do června Ivo vyrostl o 5 cm. V lednu byl Ivo o 3 cm vyšší než stůl. O kolik cm je v červnu Ivo vyšší než stůl?

4.1.2 Žák umí sčítat

V první třídě žák sčítá nejprve čísla do 5, později do 10 a na konci prvního ročníku do 20; mnozí žáci do 100, někteří i do 1000. První součty nachází žák manipulací, později některé spoje automatizuje. Ty nazveme *majákové*.

Žáci ke sčítání používají nejčastěji prsty nebo počítadlo. Možnost použít prsty dává žákovi jistotu a napomáhá rozvíjet jeho vhled do součtových spojů. Konečně i my, dospělí, nezřídka použijeme prsty. Prsty například použiji, když chci vědět, kolik dní jsem byl mimo Prahu, když jsem odjel ráno 17. 3. a vrátil se večer 22. 3. Použiji prsty, i když vím, že to mohu zjistit výpočtem 22 – 17 + 1 = 6. Prsty jsou jistější a vyžadují méně energie.

Prsty a počítadlo jsou nejčastějšími, ne však jedinými nástroji nácviku sčítání. Dalšími nástroji jsou peníze, číselná osa, krokování atp. Jeden náš žák (třetí ročník), který byl diagnostikován jako mentálně nezralý, správně a poměrně rychle počítal úlohy o penězích. Vně tohoto kontextu byl bezradný. Jiný bystrý hoch s deformovanou ručičkou nemohl používat prsty, ale pomocí číselné osy, kterou mu moudrá učitelka nalepila na lavici, počítal velice rychle i spolehlivě. Kolegyně, která učí mentálně postižené žáky, konstatovala: „Mám dva žáky, kteří poprvé správně sečetli 2 + 3 až na krokovacím pásu."

Někteří žáci velice rychle zvládnou paměťové spoje do 10 nebo i do 20. Jiným to trvá déle. Učitel, který je přesvědčen, že jeho úlohou je rozvíjet matematické myšlení žáků a že rychlost a spolehlivost sčítání nejsou kritérii myšlení, bude respektovat tři didaktické zásady:

1. Nespěchat. Podstatná je správnost výsledku, nikoli rychlost nebo použité pomůcky. Učitel trpělivě čeká, až se u žáka spoje zautomatizují.

2. Umožnit žákovi jeho vlastní početní postupy. Zejména mu povolit všechny pomůcky, které při práci potřebuje.

3. Předkládat žákovi poutavé úlohy vyžadující mnohé sčítání. Takové úlohy nabízejí prostředí Pavučiny, Hadi, Součtové trojúhelníky i Barevné trojice. Výpočty jsou motivovány poutavou úlohou, k jejímuž vyřešení musí žák hodně počítat. Počítá s vervou, protože chce poutavou úlohu vyřešit. Je to stejné, jako když je na tělocviku žák otráven běháním po dráze, ale za „mičudou" běhá s vervou, neboť chce dát gól.

První zásada nevyžaduje komentář. Třetí zásadu budeme diskutovat v kapitole 4.1.5. Druhou zásadu ilustruje následující příběh, ve kterém uvádíme tři různé postupy řešení úlohy 6 + 7 = ? dvěma žáky prvního ročníku a předškolákem Hynkem.

47 Příběh

„6 + 7 = _?“: různé strategie

Hynek, který často hrával Člověče, nezlob se, použil k výpočtu 6 + 7 = ___ majákový spoj 6 + 6 = 10 + 2 a řekl: „...deset a dvě, θ a tři, θ třináct.“ (Znak θ představuje pauzu 2–5 sekund.) Ze hry věděl, že 6 + 6 = 10 + 2 a správně přidal 1, aby číslo 6 dorovnal na 7.

Helenka uviděla nápis 6 + 7 = ___ a po chvilce zaváhání rychle řekla „patnáct“. Když viděla, že učitelka neplesá, ihned se opravila a řekla „třináct“. Svůj omyl vysvětlila slovy: „...jo, to se má odčítat.“ Tedy dívka použila majákový spoj 7 + 7 = 14, řekla si, že 6 se od 7 liší o 1, a proto i výsledek se od 14 liší o 1. Správná úvaha. Chybovala v tom, že místo odčítání 14 – 1 = 13 přičítala 14 + 1 = 15. To, že se okamžitě opravila, ukazuje, že dívka váhala, zda tu jedničku přičítat, nebo odčítat. Když její pokus přičítat neuspěl, ihned změnila na správné odčítat.

Hubert ihned po zhlédnutí nápisu 6 + 7 = vztyčil palec levé ruky, pak palec a ukazovák pravé ruky, ruce dal k sobě a řekl třináct. Mentálně rozložil 6 = 5 + 1, 7 = 5 + 2, obě pětky mu daly 10 a na prstech viděl 3. O den později týž hoch počítal úlohu 7 + 6 = ___ rozkladem 7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 10 + 3 = 13. Poznali jsme to podle pohybu jeho levé ruky, na které vystrčil 3 prsty. Ty tři, které zbyly, když z 6 odebral 3, aby doplnil 7 do 10.

Komentář k příběhu 47

Žáci tedy používají různé výpočetní postupy a právě tato různorodost urychluje nejen automatizaci sčítacích spojů, ale i porozumění operaci. Učitel, který dá žákům možnost ukázat jejich vlastní postup celé třídě, rozvoj všech žáků urychluje. Snaží-li se učitel vést žáky k používání jednotného algoritmu, zpomaluje rozvoj většiny žáků. To se děje zejména u nácviku přechodu přes desítku, o kterém píšeme v kapitole 4.1.4.

4.1.3 Nácvik spojů

Mnozí učitelé i rodiče jsou přesvědčeni, že

- hbitost a spolehlivost sčítání do 20 je hlavním cílem výuky matematiky v prvním ročníku;
- nejúčinnější cesta, jak toho cíle dosáhnout, je masivní nácvik součtových spojů;
- používání prstů, počítadla a jiných pomůcek proces učení brzdí;
- bez dokonalého zvládnutí paměťového sčítání do 10 (později do 20) nemůže žák pochopit náročnější myšlenky jako násobení.

Výzkumy mnoha badatelů i naše vlastní výzkumy odporují tomuto přesvědčení, a to zejména ze čtyř důvodů:

1. Poslední z výše uvedených bodů je předsudek. Existuje mnoho žáků, kteří byli na prvním stupni hodnoceni jako slabí, protože jim hbité počítání nešlo, nicméně na druhém, nebo dokonce až na třetím stupni patřili k nejlepším.

2. Důraz na rychlost a spolehlivost počítání frustruje pomalejší žáky. K nim patří slabší žáci, ale i někteří hloubaví, kteří cítí potřebu výsledek najít, a ne jej pouze odříkat. Frustraci nezpůsobují úlohy, ale tlak učitele nebo rodiče, tedy časová tíseň a obava z neúspěchu. Když učitel vidí, že většina žáků již součtové spoje umí zpaměti, začíná spoje „promrskávat“ a naléhat na pomalejší žáky, aby řekli výsledek rychle a bez prstů. Mylně se domnívá, že tím urychlí proces učení. Ve skutečnosti zákaz používat prsty žáka frustruje a brzdí jeho vývoj. Viz příběh „Gustav“ z Hejný a Kuřina (2009, s. 114)[62].

62
HEJNÝ, Milan – KUŘINA, František. Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování, op. cit., 2. vyd., s. 114.

3. Pro žáky, kteří již sčítají rychle, může být neustálé opakování nudné. Mezi těmito žáky jsou tací, kteří soutěže na rychlost i paměťové učení se počtům vítají. Jejich radost pramení z pocitu narůstající dokonalosti schopnosti sčítat. Nicméně po dosažení jisté úrovně narůstání dokonalosti končí a radost z růstu odumírá. Jestliže bude tato radost nahrazena radostí žáka ze sociálního úspěchu, bude tento žák hbité počítání vítat i nadále. Jestliže má ale žák potřebu intelektuálního růstu, pociťuje stereotypní opakování známých věcí jako únavné, nudné a jako ztrátu času. Ať tak či onak, rozvoj matematického myšlení žáka další nácvik sčítání utlumuje a brzdí.

4. Masivní nácviky spojů se promítají do metakognitivní oblasti žákova vědomí zdůrazňováním významu paměti a podhodnocováním významu myšlení. V budoucnu bude žák od učitele vyžadovat pravidla a vzorce, které se naučí a které bude aplikovat na standardní úlohy. Žáci, kteří si uchovají potřebu porozumět matematice a potravu pro tuto potřebu hledají v různých kvizech a hlavolamech, začnou často na druhém stupni vynikat. Zde se totiž objeví zlomky, záporná čísla, kombinatorika, geometrické konstrukce…, oblasti příliš rozsáhlé na to, aby byly zvládnuty pamětí. Žáci, kteří si zvykli učit se matematiku pamětí, začínají upadat.

Výzva 23

Vyhodnoťte, jaký význam mají soutěživé hry typu Král počtů: a) pro žáky, kteří si vybavují početní spoje rychle, a b) pro žáky, kteří si vybavují početní spoje pomalu.

4.1.4 Sčítání s přechodem přes desítku

Větší čísla již žáci neumějí sčítat v paměti. Učitel s nimi začne cvičit známý algoritmus, jehož kritickým místem je přechod přes desítku. Algoritmus spočívá v rozkladu druhého sčítance a doplnění prvního sčítance na celou desítku. V případě, že druhý sčítanec je větší, lze rozkládat první sčítanec. Algoritmus použil Hubert z příběhu 47 při sčítání 7 + 6. Proces přechodu přes desítku se skládá ze tří myšlenkových kroků. Ilustrujeme je na součtu 3 + 8 = ?:

- najdu, co mám dopočítat k prvnímu sčítanci, k číslu 3, abych dostal 10; je to 7
- druhý sčítanec, číslo 8, rozložím na součet 7 + *n* (*n* = něco); zjistím, že *n* = 1
- napíšu výsledek 1*n*; tedy 11.

V naší úloze tedy byla rozkládána osmička.

Popsaný postup je dobrá strategie, v některých případech skoro jediná vhodná, například u součtu 99 + 2. Didakticky problematické je ale její důsledné prosazování. Dříve než ukážeme, proč je to problematické, podíváme se na příběh. Pochází z diplomové práce Lucie Panovské z roku 2012[63]. Autorka učila žáky druhého ročníku. Všichni byli ze sociokulturně znevýhodněného prostředí. Velice zajímavé epizody, které ve své práci popisuje, stěží lze tak hojně najít v běžných třídách.

48 **Příběh**
Slabší žáci a algoritmus rozkladu při přechodu přes desítku

Na straně 33 diplomové práce uvádí L. Panovská tři postupy slabších žáků při řešení úlohy 3 + 8 = ?

Jan úlohu neřešil, protože nevěděl, které číslo má rozdělit; jiný žák ze stejného důvodu neřešil ani úlohu 3 + 5.

Jitka udělala první krok algoritmu, dopočítala, že do 10 schází 7, a napsala 3 + 8 = 7.

Jiří udělal i druhý krok algoritmu, zjistil, že z čísla 8 zůstane 1 a napsal 3 + 8 = 71

Komentář k příběhu 48
Proč se žáci dopouštějí tak závažných, až nepochopitelných omylů? Autorka v analýze těchto postupů správně ukazuje, že žáci u tohoto algoritmu musí kromě čísel 3 a 8 pracovat i s čísly 10, 7 a 1. Ta se projeví ve výsledku. Autorka konstatuje, že manipulativní činnost (knoflíky, prsty...) je u těchto žáků výrazně úspěšnější než přechod přes desítku pomocí algoritmu.

V roce 2005 jsme udělali sondu: požádali jsme 14 posluchačů, aby mentálně sčítali 27 + 46. Pak jsme se ptali, jak při sčítání postupovali. Většina našla napřed součet 20 + 40 = 60, pak součet 7 + 6 = 13 a nakonec sečetli oba dílčí výsledky 60 + 13 = 73. Někteří k číslu 46 přičetli 20 a pak k 66 ještě 7. I tito ale 6 + 7 = 13 měli jako majákový spoj. Přechod přes desítku nepoužil žádný. Sondu opakujeme každým rokem a výsledek je stejný.

4.1.5 Cesta k automatizaci

Naše kritika tradičních nácviků neznevažuje potřebu automatizace součtových spojů. Jsme přesvědčeni, že tato automatizace je potřebná, ale nemusí jí být dosaženo již na konci prvního ročníku. Nadaný žák, který počítá pomalu, není žádnou výjimkou, a pokud učitel nadání žáka nepostřehne, neznamená to, že ho žák nemá. Sytit žáka nácvikem sloupečků je velmi riskantní – ohrozí to jeho

63
PANOVSKÁ, Lucie. Budování představ čísla do 100. Diplomová práce. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2012. 106 s.

64
N-trojúhelníkem je součtový trojúhelník, který má v prvním řádku n čísel.

65
Řady, které se lámou, se poprvé vyskytují v F3; 46 (HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*, op. cit., s. 46), kde je tato úloha: Zjisti, jak byla vytvořena řada čísel: 5, 11, 17, 23, 3, 9, 15, 21, 1, 7, 13, 19, 25, 5, 11...
Hledané pravidlo zní: k předchozímu číslu přičítám číslo 6. Pokud překročím 20, odečtu 20. Tato řada se láme číslem 20. Řadu přestávám zapisovat, když se začnou čísla opakovat.

motivaci, sebepojetí i chápání smyslu studia matematiky. Někteří žáci mohou mít s automatizací potíže velmi dlouho a otázka „kdy už je nemají mít" není na místě. Platí zde stále pravidlo č. 1 uvedené v kapitole 4.1.2: Nespěchat. Trpělivě čekat, až se u žáka spoje zautomatizují. Edukační strategie, kterou na nácvik součtových spojů doporučujeme, byla uvedena výše v pravidle 3 téže kapitoly: Předkládat žákovi poutavé úlohy vyžadující mnohá sčítání.

Nyní několik takových úloh ukážeme. První se týkají součtových trojúhelníků, další posloupností, které se lámou, a poslední barevných trojic.

Součtové trojúhelníky[64]

Úloha 12

V první řádce 4-trojúhelníku jsou čísla 11, 12, 13, 14. Jaké největší může být dolní číslo trojúhelníku? Najdi všechna řešení.

Žák, který již z 3-trojúhelníku ví, že prostřední číslo první řádky nejvíce přispívá k dolnímu číslu, dá čísla 11 a 12 na kraje a čísla 13 a 14 do středu. Najde čtyři taková uspořádání: *(11,13,14,12)*, *(11,14,13,12)*, *(12,13,14,11)* a *(12,14,13,11)*. Prověří, že pokaždé je dolní číslo 104. Pak namátkou zkusí například čtveřici *(13,12,11,14)* nebo *(11,12,13,14)* a zjistí, že dolní číslo je teď menší než 104. Žák je přesvědčen, že úloha má čtyři řešení – ta, která odzkoušel.

Protože výpočet každého trojúhelníku znamená šest sčítání dvoumístných čísel, udělá při řešení této úlohy žák nejméně 24 výpočtů. Nebude je ale pociťovat jako nudnou zátěž, ale jako nutnou cestu k řešení zajímavé úlohy a k vzácným okamžikům tří objevů:

- i pro 4-trojúhelníky prostřední čísla přispívají k dolnímu číslu více než krajní,
- záměnou středních čísel se dolní číslo nemění,
- záměnou krajních čísel se dolní číslo nemění.

Náročnější na mnohé počítání je následující provokativní úloha, která nemá řešení.

Úloha 13

V první řádce 4-trojúhelníku jsou čísla 11, 12, 13, 14. Uspořádejte je tak, aby dolní číslo bylo 101.

Navzdory úsilí se žákům řešení nepodaří najít. Zjistí, že dolní číslo ve všech případech vychází sudé. Jestliže k této domněnce dojdou žáci ve třetím ročníku, nebudou ji umět prověřit jinak než výpočtem všech 24 trojúhelníků. Pro jedince je to úloha úmorná, ale třída to zvládne během deseti minut, když si práci dobře zorganizuje.

Posloupnosti, které se lámou

Úloha 14

Najděte stý člen posloupnosti 1, 5, 9, 13..., která se láme u čísla 10. Jinak řečeno, když překročíme číslo 10, dostaneme další číslo posloupnosti odečtením 10 od posledního čísla.[65]

Na první pohled se řešiteli zdá, že bude muset udělat bezmála sto přičítání čísla 4, což je práce nezajímavá. Když ale najde prvních 10 čísel: **1**, 5, 9, 13, 3, 7, 11, **1**, 5, 9, uvidí, že čísla se opakují. Perioda posloupnosti je 7, tedy číslo na *n*-tém místě je stejné jako číslo na (*n*+7)-mém místě. Není nutno dále počítat, stačí si všimnout, že číslo 1 bude na *prvním* a *osmém* místě; vidíme, že řada **1**, 5, 9, 13, 3, 7, 11, **1**... se stále opakuje, takže jednička je dále také na místě *patnáctém*, *dvaadvacátém* atd. Když toto slovně vyjádřené pořadí přepíšeme do čísel, vidíme, že dostáváme novou posloupnost – posloupnost *pořadí* čísla *jedna* (jednička je první, pak je osmá…):

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99 (*)

a v této posloupnosti pořadí spatříme, že číslo 1 je také na 99tém místě. Když si žák uvědomí, že posloupnost pořadí čísla 1 tvoří čísla, která při dělení číslem 7 dají zbytek 1, pak nebude vypisovat celou posloupnost (*), ale skočí hned na její konec, k číslu 99 = 7 × 14 + 1. Tak nebo onak, žák zjistí, že na stém místě původní posloupnosti je číslo následující v původní posloupnosti za jedničkou, tedy číslo 5.

Opět řešitel udělal hodně kalkulativních kroků, ale protože byly zaměřeny k vyššímu cíli, nepociťoval je jako nudu. Navíc žák poznal periodickou posloupnost a její důležitou vlastnost: je-li *p* perioda, pak číslo na n-tém místě je stejné jako číslo na (*n*+*p*)-tém místě.

Úloha 15

Najděte stý člen posloupnosti 7, 14, 21, 1, 8, 15, 22, 2..., která se láme u čísla 20. Jinak řečeno, když překročíme číslo 20, dostaneme další číslo posloupnosti odečtením 20 od posledního čísla.

Na první pohled se řešiteli zdá, že bude muset udělat bezmála sto přičítání čísla 7, což je práce nezajímavá. Když ale najde prvních 28 čísel:

7, 14, 21, 1, 8, 15, 22, 2, 9, 16, 23, 3, 10, 17, 24, 4, 11, 18, 25, 5, 12, 19, 26, 6, 13, 20, 27, 7, 14, zjistí, že čísla se opakují a že číslo 7, které je na prvním místě posloupnosti, bude i na místech 28, 55, 82 a 109. Na stém místě je pak číslo 25.

I zde řešitel udělá mnoho přičítání, která ale směřují k jistému cíli.

Barevné trojice

Úloha 16

Je dáno 12 čísel. Čtyři červená – 1, 2, 3, 8, čtyři modrá – 1, 2, 3, 7 a čtyři zelená – 1, 2, 4, 6. Čísla rozděl do 4 skupin tak, aby v každé skupině byla zastoupena každá barva a aby součet všech čísel každé skupiny byl 10.

Úlohy řešíme již od druhého pololetí prvního ročníku (F1/2;15, 18, 19, 23, 27, 32, 36, 43, 50, 56, 63)[66]. Protože obtížnost úlohy tkví nikoli v aritmetice, ale v kombinatorice, jsou tyto úlohy náročné. Proto je řešíme nejprve pomocí dramatizace. Dvanáct žáků stojí u tabule tváří ke třídě, každý drží ceduli s jedním číslem. Na jedné straně čísla červená (*1*,*2*,*3*,*8*), uprostřed čísla modrá (*1*,*2*,*3*,*7*) a na druhé straně čísla zelená (*1*,*2*,*4*,*6*). Učitel nejprve ukáže, co je cílem hry. Vybere červenou *1*, modrou *3* a zelenou *6* a tito žáci předstoupí. *Jaký je součet těchto tří čísel?* ptá se učitel. Třída odpoví, že *10*. Učitel žáky vrátí zpět do svých skupin a vyzve červenou *8*, ať si najde jedno modré číslo a jedno zelené číslo tak, aby společně v součtu čísla dala *10*. Číslo 8 si najde obě jedničky. Trojice *8 + 1 + 1* se postaví stranou a učitel řekne žákům, aby si v učebnici spojili červenou *8*, modrou *1* a zelenou *1* a do první řádky napsali tuto trojici. Pak učitel vyzve modrou *7*, aby si našla dva kamarády, červeného a zeleného, tak, aby společně v součtu dali *10*. Modré číslo *7* si najde červenou *1* a zelenou *2*. Trojice *1 + 7 + 2* se postaví stranou. Žáci si do učebnic opět tuto trojici zapíšou. Dále učitel vyzve zelenou *6* a ta si najde obě dvojky. Trojice *2 + 2 + 6* se postaví stranou a zbylá trojice *3 + 3 + 4* pouze prověří, že i ona v součtu dá *10*. Před třídou teď stojí čtyři trojice. V každé jsou tři čísla různých barev a každá trojice v součtu dává *10*. Úloha je vyřešena. Žáci si kontrolují, zda si to do učebnice správně zapsali. Pomocí uvedeného představení žáci pochopí, jak se tyto úlohy řeší. Místo dramatizace budou používat simulovanou dramatizaci. Vystřihnou si lístečky s barevnými čísly a s těmi manipulují tak, aby dostali požadované trojice. Ovšem často se stane, že první zvolená trojice není správná, protože pak se nedá složit do požadovaného součtu všech dvanáct čísel. Například k trojici *1 + 3 + 6* lze přidat trojici *2 + 7 + 1*, ale pak už nic. Proto řešení vyžaduje mnohé počítání. Navíc si při této práci žák osvojuje víc než spoje

66 HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*, op. cit., s. 15, 18, 19, 23, 27, 32, 36, 43, 50, 56, 63.

sčítání. Rozvíjí si aritmetickou intuici a zvyšuje svoje schopnosti hledat účinné řešitelské strategie. Kupříkladu si všimne, že výhodné je začínat velkými čísly.

4.1.6 Žák rozumí algoritmu operace

Žák, který si sám nějaký fungující algoritmus vytvoří, určitě svému algoritmu rozumí. Žák, který si převzatý algoritmus nácvikem osvojil, často nedovede vysvětlit, proč algoritmus pracuje tak, jak pracuje. Někteří žáci mu nerozumí ani na druhém stupni. To samo o sobě nelze považovat za vážný nedostatek. Těmto žákům však schází nejen vhled do algoritmu písemného sčítání, ale i vhled do desítkové soustavy, a to již vážný nedostatek je. Jde především o plné pochopení toho, že deset jedniček se mění na jednu desítku, deset desítek na jednu stovku atd.

Uvedeme čtyři postupy vhodné k budování porozumění pro desítkovou soustavu v oblasti písemného sčítání.

Římská čísla. Při sčítání VI + VII = XIII žák mění V + V na X. Při sčítání VIII + VII = XIIIII = XV žák nejprve mění V + V na X, pak IIIII na V. Při sčítání VIII + IX = VII + X = XVII žák nejprve vzájemně vyruší dvě jedničky a zbytek lehce sčítá. Sčítání IX + IC žák nejprve upraví na odčítání CX − II, pak odečte X − II = VIII a nakonec napíše výsledek CVIII.

Ve všech uvedených úlohách musí žák pracovat s čísly a měnit je vzájemně tak, aby dospěl k výsledku. Přitom je třeba motivovat žáky k tomu, aby pracovali rovnou s římskými číslicemi, bez převodů na čísla arabská a zpět.

Peníze. Označme korunovou minci $\boxed{1}$ a 10korunovou minci $\boxed{10}$. Součet 27 + 36 hledá žák tak, že čísla vymodeluje:

27 → $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$

a 36 → $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$.

Oba obnosy dá dohromady, dostane

$\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$,

tedy pět $\boxed{10}$ a třináct $\boxed{1}$.

Teď přijde klíčový okamžik postupu: směna deseti $\boxed{1}$ za jednu $\boxed{10}$.

Výsledek: $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{10}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$ = 63

Pokud žák řeší tyto úlohy manipulativně pomocí žetonů, lze vytvořit i žeton $\boxed{5}$ na pětikorunovou minci. Pak je toto prostředí propojeno na římská čísla.

Algebrogramy. Když ve vztahu 31 + 1 = 32 zašifrujeme číslice 3 a 1 písmeny A a B, získáme zápis AB + B = 32. Takový zápis nazýváme **algebrogram**. Vyřešit jej znamená najít číslice, které se za písmeny A a B skrývají. Přitom za stejnými písmeny se skrývají stejné číslice, za různými písmeny různé číslice. Řešit algebrogram znamená najít všechna řešení. V našem případě jsou to řešení dvě. Kromě uvedeného 31 + 1 = 32 je to i 26 + 6 = 32.

Neposedové. Když z výpočtu 35 + 21 = 56 odložíme číslice 1, 2 a 3 bokem a necháme po nich pouze prázdná místa, dostaneme zápis $\boxed{}\boxed{5} + \boxed{}\boxed{}$ = 56. Úlohou žáka je odložené číslice (neposedy) vrátit zpět do výpočtu.

Úloha 17

Vrať neposedy uvedené v závorce zpět do rovností. Hledej více možností.
V úlohách c) a d) jedno číslo uteklo.

a) □ + □ = □□ (1, 1, 2, 9); b) □ + □□ = □□ (1, 3, 4, 5, 6).

c) □ + □ = □□ (7, 8, 9, ?); d) □ + □□ = □□ (6, 6, 7, 7, ?).

Komentář k řešení:

a) Úloha má dvě řešení: 2 + 9 = 11 a 9 + 2 = 11;
b) Úloha má dvě řešení: 6 + 35 = 41 a 5 + 36 = 41;
c) Úloha má dvě řešení: 8 + 9 = 17 a 9 + 8 = 17;
d) Úloha má více než 5 řešení. Jedno je například 0 + 67 = 67 a jiné je 7 + 69 = 76.

Odčítání

Odčítání je náročnější než sčítání, a to jak z hlediska sémantických představ, tak z hlediska kalkulací.

Jestliže v případě sčítání byla situace A + B = C jediná možná (všechna tři čísla A, B i C jsou kladná), nastává v případě odčítání docela bohaté spektrum situací. Operace sčítání je v oblasti přirozených čísel uzavřená. To značí, že když dvě přirozená čísla sečtu, opět dostanu přirozené číslo. I když v první třídě nepřekročíme číslo 20, více žáků již dokáže počítat do sta i dále a všichni vědí, že se to dá a že se to naučí. Jiná je ale situace u odčítání. Rozdíl 2 – 3 je něco, co pro žáka prvního ročníku neexistuje. Například, má-li žák prvního ročníku řešit úlohu 2 – 5 + 4 = ?, kterou učitel zadal omylem, může hned říct, že to nelze, protože od 2 nelze odebrat 5. Žák ale může použít prostředí Krokování nebo Schodů a říct: když jdu 2 schody nahoru, pak 5 schodů dolů a pak 4 schody nahoru, budu o 1 schod výše než na začátku, tedy 2 – 5 + 4 = 1. Rozdíl 2 – 3 neexistuje v oboru přirozených čísel, a když pracujeme s počty (prstů, jablek, panenek…), vysvětlení pro výraz 2 – 3 nenajdeme; představa záporného čísla jako nedostatku nebo dluhu je pro mnohé žáky málo srozumitelná. Podstatně pochopitelnější jsou představy záporných čísel reprezentovaných pohybem dozadu nebo pomocí záporných adres, zejména v prostředí Krokování a Schody. Když pracujeme v prostředí Schody, je -1 jeden krok dozadu, tedy operátor, nebo je to 1 schod pod schodem 0, tedy adresa.

4.2.1 Žák rozumí smyslu operace

Skoro vše, co bylo řečeno v 4.1.1 o sčítání, platí po případné úpravě i o odčítání. Tak například tři diagnostické indikátory uvedené u sčítání zůstávají i pro odčítání:

a) Žák spolehlivě vyřeší slovní úlohu na odčítání každého z jedenácti základních sémantických typů uvedených v tabulce 8.

b) Žák pomocí dramatizace, manipulace nebo obrázku spolehlivě uchopí úlohu s antisignálem, ve které navzdory slovu, které napovídá sčítání, výsledek najde odčítáním.

c) Žák umí vytvořit slovní úlohu, jejíž matematický model je 5 – 2 = ? (žák prvního ročníku zvládne jeden typ, žák pátého ročníku každý z typů 01 až 07).

U odčítání přibudou další tři diagnostické indikátory. Týkají se nástrah pochopení významu operace odčítání.

d) Žák v prostředí Krokování chápe, že 2 – 3 = -1, tj. dva kroky dopředu a pak tři dozadu značí jeden krok dozadu. Stejně chápe, že -2 – 3 = -5. Od čtvrtého ročníku rozumí tomu, proč minus před závorkou mění znaménka všech čísel, která byla původně v závorce.

e) Žák umí v prostředí Schody vysvětlit vztahy 3 – 2 = 1, 2 – 3 = -1. Od čtvrtého ročníku ví, že přičítat číslo -4 je totéž co odečíst číslo 4, že odčítat číslo -4 je totéž co přičítat číslo 4. Tedy ví, že - (-1) = 1 a že výrok „teplota poklesla o -3 °C“ velice nešikovně říká, že se oteplilo o 3 °C.

f) Ve třetím ročníku žák ví (i když termín adresa a operátor nepoužívá), že situaci „bydlel jsem v 5. podlaží a přestěhoval jsem se o 2 podlaží dolů“ mohu zapsat A + OZ, kde A = 5 je adresa a operátor OZ = -2 je záporný, nebo A – OZ, kde A = 5 je adresa a operátor změny je OZ = 2 je kladný.

Podívejme se, jak se uvedené myšlenky projeví v úlohách. Z úlohy 10, která je typu $OZ_A + OP_{BA} = OZ_B$ (změna u Adama + rozdíl mezi Borisem a Adamem = změna u Borise), $OZ_A > 0$, $OP_{BA} > 0$, $OZ_B > 0$, lze vytvořit celkem 4 různé úlohy na odčítání podle toho, které ze vstupních čísel OZ_A a OP_{BA} je kladné a které záporné a jaké je číslo OZ_B. Uvedeme případ, pro který je $OZ_A < 0$, $OP_{BA} > 0$, $OZ_B < 0$.

Úloha 18

(typ 08, resp. 09) Adam a Boris bydleli ve stejném podlaží paneláku. Letos se oba stěhovali. Adam o 3 podlaží dolů. Boris teď bydlí 2 podlaží nad Adamem. O kolik podlaží a kterým směrem se stěhoval Boris?

První uchopení. Přestěhujeme Adama a pokračujeme porovnáním současných adres obou hochů.

-3 je OZ_A: teď se Adam přestěhoval o 3 podlaží dolů.

+2 je OP_{BA}: teď ale Boris bydlí jen o 2 podlaží výše než Adam.

→ OZ_B = -1: Boris se tedy přestěhoval o 1 podlaží dolů. $OZ_A + OP_{BA} = OZ_B$

-3 + 2 = -1

Druhé uchopení. Vycházíme z finálního stavu „teď“, kdy je Boris 2 podlaží nad Adamem. Pak se podíváme, odkud přišel Adam, a ze stejného podlaží přestěhujeme Borise.

+2 je OP_{BA}: teď Boris bydlí o 2 podlaží nad Adamem.

-3 je OZ_A: Adam se ale stěhoval o 3 podlaží dolů.

→ OZ_B= -1: Boris se tedy musel přestěhovat o 1 podlaží dolů. $OP_{BA} + OZ_A = OZ_B$

2 + (-3) = -1

4.2.2 Sémantická náročnost odčítání

Odčítání je pro žáky náročnější než sčítání. Jednou z příčin je skutečnost, že sčítání nacvičujeme především na úlohách typu S1 + S2 = S3, tedy pomocí operace „dát dohromady“. Operace k ní inverzní je „rozdělit“. Ta ale neodpovídá odčítání. Tedy úlohy typu 01 (viz tab. 8) nepřipravují žáka na odčítání. Připravují jej na situace, kdy je dané číslo třeba rozložit na dvě, jejichž součtem dané číslo je.

Přípravou na odčítání jsou úlohy typu 02 až 05 (viz tab. 8), tedy úlohy s jedním operátorem.

U úloh typu 02 a 04 operátor změny lehce mění znaménko: vyhrát → prohrát, získat → ztratit, nastoupit → vystoupit, přidat → ubrat atd. Zde ilustrace není nutno uvádět.

U úloh typu 03 a 05 operátor porovnání mění znaménko podle uchopení příslušného porovnávajícího slova. Výrok „V naší třídě je o 1 žáka více než v třídě vedlejší“ ($S_N = S_V + OP$) říká totéž, co výrok „Ve vedlejší třídě je o 1 žáka méně než v naší“ ($S_V = S_N - OP$).

Z uvedeného vyplývá didaktické doporučení: Budou-li žáci již od prvního ročníku řešit úlohy typu 02 až 05 (viz tab. 8), budou lépe připraveni na sémantické pochopení operace odčítání. Vhodná prostředí k této přípravě jsou Krokování, Schody i Autobus.

Odčítání typu 01 (viz tab. 8), tedy odčítání $S_1 - S_2 = S_3$, vychází ze situace doplnění známé části do známého celku. Ilustrace:

Úloha 19

Na pískovišti je 8 dětí, z toho 5 holčiček. Kolik je tam kluků?

Zde $S_1 = 8$ je počet všech dětí na pískovišti, $S_2 = 5$ je počet holčiček a $S_3 = 3$ je počet kluků. Těmto úlohám také říkáme úlohy *s komplementem* neboli *s doplňkem*. Zde žák většinou používá dopočítávání. K pěti prstům postupně přidává další tři.

Úlohy typu 02 nebo 03, v nichž je neznámý operátor, řeší žáci nejčastěji odčítáním. Ilustrace:

Úloha 20

Na pískovišti je 8 dívek a 5 kluků. Koho je víc? O kolik?

Zde $S_1 = 8$ je počet dívek na pískovišti, $S_2 = 5$ je počet hochů a OP = 3 je rozdíl.

Propojením posledních dvou úloh vzniká náročná úloha vyžadující dvojí odčítání.

Úloha 21

Na pískovišti je 8 dětí, z toho 5 kluků a zbytek jsou holky. Koho je víc? Holek, nebo kluků? O kolik?

Slovo *rozdíl* bývá zdrojem nedorozumění. Stává se, že žák chápe rozdíl čísel p a q jako číslo $p - q$. Pak rozdíl čísel 2 a 5 je záporné číslo -3. Tato interpretace odporuje konvenci, podle které rozdíl je číslo **nezáporné**.
Tedy rozdíl čísel p a q je číslo $|p - q|$.

Úloha 22

Mezi Evou a Ivou je rozdíl 5 let. Evě je 11. Kolik je Ivě?

Úloha má dvě řešení, stejně jako rovnice $|11 - x| = 5$ má řešení $x = 6$ i $x = 16$.

4.2.3 Odčítání adres

Pro některé žáky je odčítání nejsrozumitelnější na číselné ose (úlohy typu 04 a 05). Rozdíl čísel chápou jako vzdálenost daných čísel na číselné ose. Mezi číslem 2 a číslem 5 jsou tři jednotkové intervaly, a tedy rozdíl je 3. Nebo se z druhého intervalu <1,2> na pátý interval <4,5> dostanou překročením tří čísel (2, 3 a 4), a tedy rozdíl je 3.

Obr. 17

Při odčítání na číselné ose se žáci často dopouštějí chyby, která spočívá v nerozlišování mezi čísly a intervaly. Na obrázku 17 vidíme číselnou osu s vyznačenými čísly 0, 1, ..., 7 s popsanými intervaly první, druhý... osmý.
Rozdíl 5 – 2 počítá žák chybně buď tak, že si všímá pouze čísel, nebo pouze intervalů. Když si všímá pouze čísel, vidí, že mezi čísly 2 a 5 jsou jen dvě čísla (3 a 4), a tak řekne, že rozdíl je 2. Když si všímá pouze intervalů, vidí, že mezi druhým a pátým intervalem jsou jen dva intervaly (třetí a čtvrtý), a řekne, že rozdíl je 2. (Obr. 17)

Existují dva správné postupy výpočtu 5 – 2 na číselné ose.

První: mezi číslem 2 a 5 jsou tři intervaly (třetí, čtvrtý a pátý).

Druhý: mezi druhým a pátým intervalem jsou tři čísla (2, 3 a 4).

Situaci lze přirovnat k laťkovému plotu, ve kterém se pravidelně střídají laťky a mezery. Vzdálenost latěk A a B není určena počtem latěk ležících mezi A a B, ale počtem mezer mezi nimi[67].

Dodejme, že číslování intervalů není dáno jednoznačně. Jinak číslují intervaly historikové a jinak stavbaři. Kdybychom první interval nazvali nultým, postupovali bychom jako stavbaři při číslování pater. Přízemí je vlastně nulté patro. Tato terminologie je ale pro dítě zavádějící, protože když dítě staví věž z krychliček, potřebuje na trojpatrovou věž 4 krychle. To je matoucí. Proto u věží z krychlí i u poschoďových domů nemluvíme o patrech, ale o podlažích. Čtyřpodlažní věž má 4 krychle a to je jasné (viz příběh 32). Naše volba vztahu čísel a intervalů odpovídá způsobu počítání desetiletí, staletí nebo tisíciletí. Rok 2009 padne do prvního desetiletí 21. století. Druhé tisíciletí začínalo 1. ledna 1001 a končilo 31. prosince 2000. Nulté tisíciletí neexistuje a stejně neexistuje rok nula.

Poznámka k percepci čísla

Důležitým parametrem u aritmetických úloh, zejména v rané etapě poznávání matematiky, je způsob vnímání (*percepce*) čísla. Může být kinestetická, vizuální, akustická, haptická (hmatová) i kombinovaná. Vizuální reprezentace čísla (obrázek, graf, tabulka…) bývá *stabilní*, *trvalá*. Žák má možnost vidět reprezentanta čísla (například obrázek tří panenek) permanentně. Akustická reprezentace čísla (počet písknutí), stejně jako kinestetické vnímání čísla (krokování), je *pomíjivá*. Pomíjivá je složená percepce kinesteticko-akustická (tleskání, dupání). Haptická reprezentace čísla může být stabilní i pomíjivá. Je pochopitelné, že úloha, která pracuje s pomíjivými čísly, je náročnější než ta, která pracuje se stabilními čísly. Pomíjivé číslo žák uchová v krátkodobé paměti nebo ve vnější paměti – na papíře, na počítadle…

V prostředí krokování je percepce vizuální, u figurantů i kinestetická. Reprezentace čísla krokováním je pomíjivá, ale jeho záznam pomocí šipek je stálý.

V prostředí Autobus je percepce u nastupování a vystupování vizuální, případně akustická (když předmět, představující nastupujícího člověka, dopadne slyšitelně na dno krabice). U výpravčího je percepce i kinestetická. Když autobus jede, žáci žádného cestujícího nevidí. Když si žák udělá záznam o tom, kolik je v autobusu cestujících, má percepci vizuální a trvalou. Je to jedna ze zkušeností potřeby a významu zápisu.

67
Viz HEJNÝ, Milan – KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*, op. cit., 2. vyd., s. 35–41.

Slovníček pojmů

Použité zkratky

IM	izolovaný model
GM	generický model
MO	matematický orgán
OPa	operátor porovnání aditivní
OPm	operátor porovnání multiplikativní
OZa	operátor změny aditivní
OZm	operátor změny multiplikativní

Aditivní
Související se sčítáním, skládáním – z latinského *adicio* = přidávat. Označuje operace sčítání i odčítání, protože odčítání je přičítáním čísla záporného.

Adjektivum
Přídavné jméno.

Amalgám
Slitina rtuti s jedním nebo několika kovy. D. Tall a E. Gray (1994) tento pojem použili jako metaforu při popisu vzniku proceptu (procept = PRO-ces + con-CEPT).

Asociace
Propojení mezi jednotlivými myšlenkami, vjemy, pocity, náladami.

Atomární analýza písemného projevu žáka
Výzkumná metoda, která písemný projev žáka rozkládá na nejmenší možné myšlenkové celky (atomy), které uspořádá podle časového sledu. Tímto způsobem se snaží rekonstruovat řešitelský proces žáka.

Autonomní (myšlení, jednání)
Myšlení samostatné, nezávislé.

Desémantizace
Přechod od sémantického vnímání úloh k jejich znakovému vnímání; může být spontánní nebo vynucený a probíhat jak na úrovni zápisu, tak na úrovni řešitelského procesu.

Edukační interakce
Vzájemné ovlivňování všech účastníků výchovně-vzdělávacího procesu.

Edukátor
Učitel a také kdokoli jiný, kdo realizuje edukační (vzdělávací) procesy i mimo školní prostředí.

Frekvence
Četnost výskytu za jednotku času.

Generický model (GM)
Vzniká AHA-efektem z komunity izolovaných modelů. Je jádrem skutečného poznání. Chceme-li zjistit, do jaké míry žák ovládá nějaký pojem, vztah, operaci, proces nebo situaci, zjišťujeme počet a kvalitu jeho generických modelů příslušného poznatku.
Směrem k izolovaným modelům je generický model sjednotitelem jejich komunity a zároveň prototypem každého jedince této komunity.
Směrem k abstraktnímu poznání tvoří základnu pro uskutečnění kroku abstrakce. Velice často se objeví nejprve dílčí generický model, který sjednocuje pouze část komunity izolovaných modelů.

Identifikátory
Slova sloužící k identifikaci: jméno, označení.

Izolovaný model (IM)
Druhá etapa poznávacího procesu, tedy konkrétní případ příští znalosti.

Kabala
Doslova „přijetí". Původně talmudské označení ústní tradice. Termín byl později přenesen na židovskou mystiku a na učení předávaná od dávných časů ústně. Podstatou kabaly je intenzivní víra v nepřerušovaný vzájemný vztah mezi Bohem jako nekonečným zdrojem síly a moudrosti ve světě nahoře a člověkem v konečném světě dole. Východiskem kabaly je hebrejská abeceda. Tvary jejich písem nejsou náhodné, jsou to hieroglyfy, které ve vzájemných vztazích vytvářejí symbol a samy o sobě reprezentují čísla.

Kauzalita
Příčinnost (causa = příčina /lat./), vztah mezi příčinou a následkem.

Kognitivní
Mající poznávací význam, a tedy i pravdivostní hodnotu; kognitivní psychologie = teorie zaměřená na zpracování informací, získávání obecných poznatků a procesů chápání.

Kognitivní autonomie
Samostatnost, nezávislost v poznávání.

Kognitivní motivace
Potřeba poznávat, která pramení z rozporu mezi

„nevím“ a „chci znát“, „neumím“ a „chtěl bych umět“, „nezkusil jsem“ a „chtěl bych zkusit“.

Komparativ
Druhý stupeň při stupňování přídavných jmen a příslovcí.

Konceptuální generický model
Slovně vyjádřený vzorec, který umožňuje najít výsledek ihned, dosazením.

Kvantita
Množství.

Majákový spoj
Opěrný spoj, který žák bezpečně zná, a může ho tedy použít jako pomocný pro spoje, které bezpečně nezná.

Matematický orgán (MO)
Matematický (duševní) orgán je myšlenkový konstrukt vytvořený metaforickým přirovnáním učitele k lékaři. Termínem matematický orgán rozumíme tu část vědomí člověka, ve které probíhají jeho matematické kognitivní činnosti.

Metakognitivní styl
Způsob poznávání vlastního (osobního) kognitivního potenciálu.

Metakognitivní znalosti
Vědomosti o tom, jakými individuálními styly, taktikami a strategiemi poznáváme.

Multiplikativní
Násobící, rozmnožující, zvětšující; multiplikace označuje operace násobení i dělení, protože dělit např. číslem 7 je totéž jako násobit číslem $\frac{1}{7}$ (z latinského *multipliceo* = rozmnožovat).

Prevence formalismu
Snaha předejít ulpívání na formální stránce věci bez zřetele k vnitřnímu obsahu nebo dopadu.

Procept
Termín *procept* zavedli jako amalgám anglických slov PRO-ces a con-CEPT D. Tall a E. Gray. Procept je poznatek, který v sobě zahrnuje tři složky: *proces*, *koncept* a *znak*.

Procesuální generický model
Návod (objevený žákem), jak *postupně* dojít k výsledku.

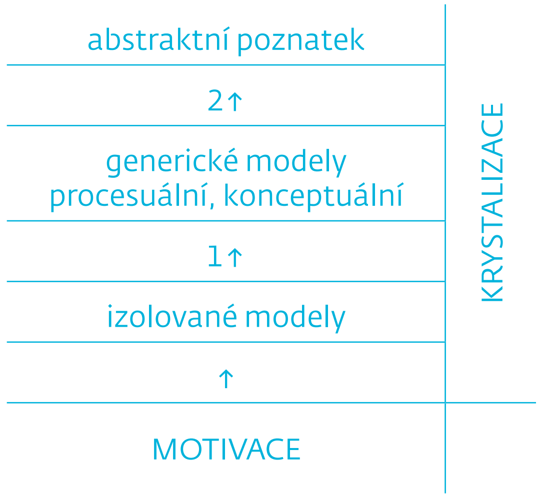
Reedukace
Podpora zlepšení narušených rozumových funkcí a schopností.

Sémantizace
Nabývání nebo připojení konkrétního významu.

Vysoká očekávání
V anglicky psané odborné literatuře i běžném slovníku anglicky mluvících pedagogů velmi frekventovaný termín („high expectations“), zejména ve spojení „vysoká očekávání od všech žáků“, u nás naopak termín téměř nepoužívaný. Jde o důvěru ve schopnosti každého žáka.

Ilustrace k metodě genetického konstruktivismu

Proces poznávání
Pět složek poznávacího procesu
(s. 17, obr. 2)



Formální poznatek
Schéma procesu učení se čtení a psaní
(s. 40, obr. 6)

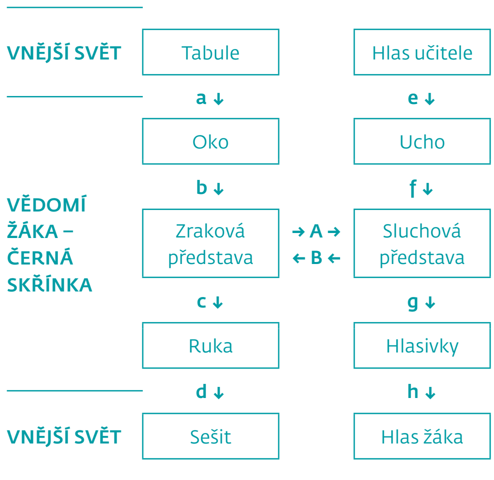
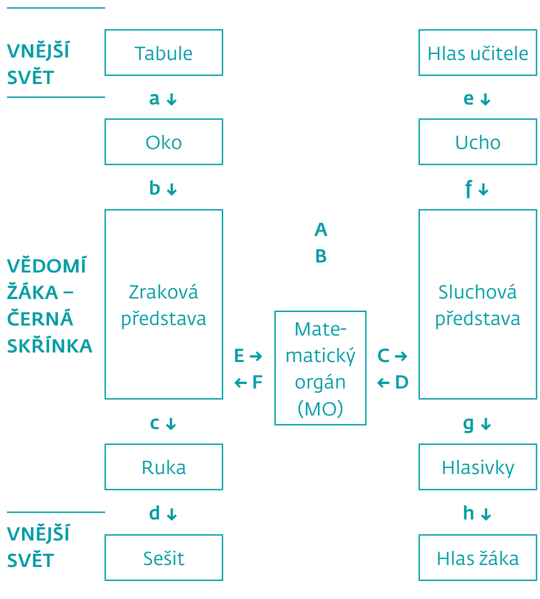


Schéma procesu učení se počítání
(s. 42, obr. 7)



Číslo

Základní typy čísla jako kvantity
(s. 71, tab. 4)

TYP			VYJÁDŘENÝ	ILUSTRACE	OTÁZKA
Stav (S)			počtem	Mám 7 kuliček. Beethoven složil 9 symfonií.	Kolik?
			veličinou	Kniha stojí 20 Kč. Auto jelo stovkou. 5 kg masa.	
Operátor (O)	aditivní	změny OZa	počtem	Vyhrál 3 kuličky. Odjela 4 auta.	Kolik? O kolik?
			veličinou	Zhubl o 5 kg. Míč byl zlevněn o 20 Kč.	
		porovnání OPa	počtem	V naší třídě je o pět dětí méně než v 5.B.	
			veličinou	Skočil o 3 cm dále. Lenka je o 7 kg lehčí než Iva.	
	multiplikativní	změny OZm		Cena dvojnásobně vzrostla. Vody troj-násobně ubylo.	Kolika-násobně?
		porovnání OPm		Anglie má pětinásobek rozlohy SR.	
Frekvence (F)	rytmická			Dopoledne jede metro každé 4 minuty.	Jak často, jak hustě?
	náhodná			Každý desátý los vyhrává.	

Čtyři typy operátorů
(s. 79, tab. 5)

OPERÁTOR	aditivní	multiplikativní
porovnání	Tetička bydlí o 3 podlaží výše. Je o 5 °C více, než bylo ráno.	Mám dvojnásobnou hmotnost hmotnosti syna. Výška pražské rozhledny je 1/5 výšky Eiffelovky.[42]
změny	Zhubl o 5 kg. Od rána se teplota zvýšila o 5 °C..	Chomout umožnil až pětinásobné zvýšení tažné síly koně. Tlak v kotli klesl na polovinu.

Číslo jako identifikátor
(s. 81, tab. 6)

IDENTIFIKÁTOR		Ilustrace: času	Ilustrace: místo / objekt / pořadí	Otázka
Adresa (A)	lineární (AL)	Giordano Bruno byl upálen 17. února 1600 v Římě. Rokem 2001 začalo 3. tisíciletí.	Bydlíme v pokoji číslo 514. Jsem na 8. kilometru dálnice. Tomáš doběhl třetí.	Kdy? Kde?
	cyklická (AC)	Pepa se narodil v 11:30 hodin. Anna má svátek dne 26. července. Třetím dnem týdne je středa.	Na Sněžku nás vyvezla kabinka číslo 7. Na pondělí vyšla data 5, 12, 19 a 26.	
Jméno		Tramvaj číslo 3. Telefonní číslo sekretářky je 233 154 111.		

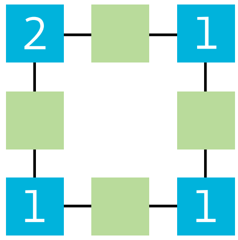
Práce s číslem

Základní typy sémantických situací operace A + B = C, v níž se vyskytuje číslo jako stav, jako aditivní operátor porovnání či změny a jako adresa
(s. 92, obr. 8)

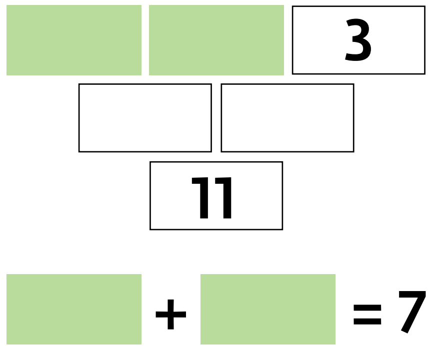
TYP	A	B	C	
01	S	S	S	1. ročník
02	S	OZ	S	
03	S	OP	S	
04	A	OZ	A	
05	A	OP	A	
06	OZ	OZ	OZ	3. ročník
07	OP	OP	OP	
08	OZ	OP	OZ	5. ročník
09	OP	OZ	OZ	
10	OP	OZ	OP	
11	OZ	OP	OP	

Vybraná matematická prostředí – rejstřík

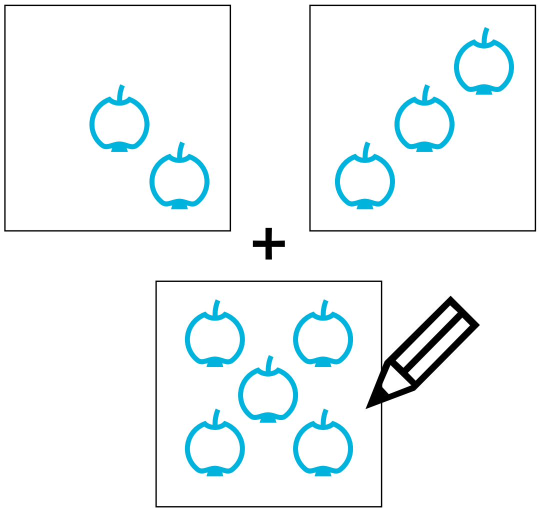
Proces poznávání
Násobilkové čtverce
(s. 15, obr. 1)



Součtové trojúhelníky s podmínkou
(s. 31, obr. 4)



Vizualizace součtu – příprava na součtové trojúhelníky
(s. 32, obr. 5)



Číslo
Sousedé
(s. 80, obr. 15a, 15b, 15c)

		2																1

1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1

1		2	1			1			1			1			1			1

Použitá literatura

BACHRATÝ, Hynek (ed.). *Archív Víta Hejného I* [pracovné materiály TMM, výchova prací, kinetická psychológia, psychológia pre pedagóga v teréne]. 1. vyd. Žilina: EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2012. 297 s. ISBN 978-80-554-0614-5.

BACHRATÝ, Hynek (ed.). *Archív Víta Hejného II* [dvadsaťpäť prác o výchove a vzdelávaní, názorná metoda ve vyučovaní počtům a matematice]. 1. vyd. Žilina: EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2016. 462 s. ISBN 978-80-554-1282-5.

DONALDSON, Margaret. *Children's Minds*. 1. vyd. Glasgow – [London]: Fontana Press, 1978. 156 s. ISBN 978-00-068-6122-5.

GRAY, Eddie M. – TALL, David O. Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1994, 25(2), s. 116–141. ISSN 0021-8251.

GRUSZCZYK-KOLCZYŃSKA, Edyta – ZIELIŃSKA, Ewa. *Jak nauczyć dzieci sztuki konstruowania gier?: metodyka, scenariusze zajęć oraz wiele ciekawych gier i zabaw*. 1. vyd. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1996. 198 s. ISBN 978-83-020-6084-7.

GRUSZCZYK-KOLCZYŃSKA, Edyta – ZIELIŃSKA, Ewa – KUPISIEWICZ, Małgorzata. *Dziecięca matematyka*. 1. vyd. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1999. 228 s. ISBN 978-83-020-7189-8.

HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. 4 sv. ISBN 978-80-7238-824-0.

HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. 4 sv. ISBN 978-80-7238-940-7.

HEJNÝ, Milan – et al. *Matematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. 4 sv. ISBN 978-80-7238-966-7.

HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika: pro 1. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2007–. ISBN 978-80-7238-626-0.

HEJNÝ, Milan – JIROTKOVÁ, Darina – SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. 4 sv. ISBN 978-80-7238-768-7.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. 1. vyd. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2014. 229 s. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEJNÝ, Milan – KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009. 232 s. ISBN 978-80-7367-397-0. – 3. vyd. Praha: Portál, 2015. 232 s. PP: pedagogická praxe. ISBN 978-80-262-0901-0.

HEJNÝ, Vít – HEJNÝ, Milan. Pracovné materiály školiaceho pracoviska tábora mladých matematikov. Banská Bystrica, Krajský pedagogický ústav [1977]. In: BACHRATÝ, Hynek (ed.). *Archív Víta Hejného I*. 1. vyd. Žilina: EDIS – vydavateľstvo Žilinskej univerzity, 2012, s. 42–43. ISBN 978-80-554-0614-5.

HOLT, John Caldwell. *Proč děti neprospívají*. 1. vyd. Praha: Strom, 1994. 156 s. ISBN 80-901662-4-5. (Z anglického originálu How children fail [London: Pitman, 1964] přeložil Jiří Tůma.)

JIROTKOVÁ, Darina. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. 1. vyd. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2010. 330 s. ISBN 978-80-7290-399-3.

KOMENSKÝ, Jan Amos. *Obecná porada o nápravě věcí lidských*. 1. vyd. Praha: Svoboda, 1992. 3 sv. (563, 500, 594 s.). ISBN 80-205-0225-4. (Původně 1645–1670.)

MAŤUŠKIN, A. M. *Problémové situácie v myslení a vo vyučování*. [1. vyd.] Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1973. 133 s. (Z ruského originálu *Problemnyje situacii v myšleni i obučenii* [Moskva: Pedagogika, 1972] preložila Oľga Pavlovičová.)

PANOVSKÁ, Lucie. *Budování představ čísla do 100*. Diplomová práce; vedoucí: prof. RNDr. Milan Hejný, CSc. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2012. 106 s.

REPÁŠ, Vladimír – et al. *Matematika pre 5. ročník základných škol: prirodzené čísla*. 1. vyd. Bratislava: Orbis pictus istropolitana, 1997. 64 s. ISBN 80-7158-144-5.

SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. Triády jako prostředí výzkumu a výuky. In: HEJNÝ, Milan – NOVOTNÁ, Jarmila – VONDROVÁ, Naďa (eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky 2*. Praha: Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, 2004, s. 409–420. ISBN 80-7290-189-3.

URBAŃSKA, Aleksandra. O aktywności matematycznej dziecka przedszkolnego – na przykładzie kształtowania pojęcia liczby. *Problemy Studiów Nauczycielskich*, 1996, 6(1), s. 90–101. ISSN 0239-6769.

Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.
Úspěch v matematice

Editorka: RNDr. Pavla Polechová, CSc.
Pomocná editorka: PhDr. Jitka Michnová
Recenzentky: Mgr. Andrea Čmoková, Mgr. Petra Dvořáková, Mr. Eva Jenšíková,
Mgr. Lucie Nováková, Mgr. Jitka Palanová

Grafický návrh a sazba: Andrea Vacovská, Anna Divišová, Petr Skalský (Studio Najbrt)
Ilustrace: David Böhm

Vydala:
Pomáháme školám k úspěchu o.p.s.
Hvězdova 1716/2b, 140 00 Praha 4
v roce 2019 jako svou 2. publikaci
www.pomahameskolam.cz

Publikace Úspěch v matematice vznikla v rámci projektu Pomáháme školám k úspěchu.

1. vydání
ISBN 978-80-906581-1-0